УДК 621.372.852
А.С. Лимонов, *к.т.н.*, **Т.М. Пустовит,** *асс*., **А.А. Лимонов**, *соиск., к.т.н.*
Одесский государственный экологический университет

ОЦЕНИВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЕКУРРЕНТНЫХ АЛГОРИТМОВ АДАПТАЦИИ

В статье исследуются рекуррентные алгоритмы адаптации для получения оценок случайных сигналов гидрометеорологической информации.
Ключевые слова: *рекуррентные алгоритмы, калмановский оцениватель, адаптация, градиентный алгоритм, итерационный алгоритм.*

Введение. Под термином «адаптация» применительно к системам цифровой обработки сигналов понимается изменение их параметров и, возможно, структуры с целью достижения заданного эффекта в результате приспособления к неизвестным заранее внешним условиям – всевозможным случайным помехам, характеристикам каналов распространения сигналов, принципиально неустранимых шумов квантования. Главным свойством адаптивной системы является изменяющееся во времени функционирование с саморегуляцией. Рекуррентные алгоритмы, включающие калмановское оценивание, итерационный и градиентный алгоритмы, недостаточно рассмотрены для использования в оценивании случайных сигналов гидрометеорологической цифровой информации.

Материалы и метод исследования: в статье исследуются методы оценивания случайных сигналов гидрометеорологической цифровой информации с использованием рекуррентных алгоритмов адаптации.

Цель статьи: исследование возможностей оценивания случайных сигналов гидрометеорологической цифровой информации, получение статистических параметров, необходимых для обработки данных сигналов с использованием рекуррентных алгоритмов адаптации.

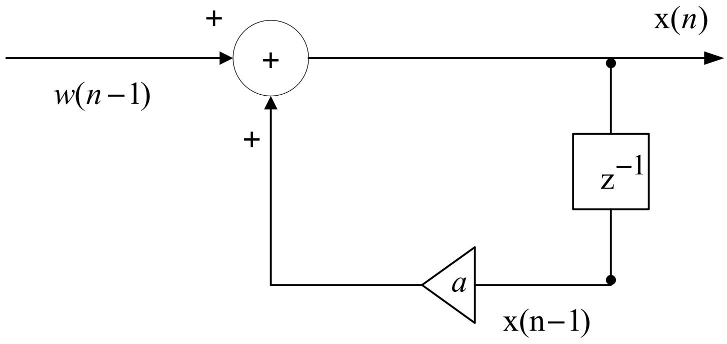
Изложение основного материала. Рекуррентные алгоритмы получения оценок позволяют вносить коррекцию на каждом шаге итерационного процесса при анализе продолжительных рядов отсчетов входного сигнала. В данной статье исследуются алгоритм калмановского оценивания, итерационный и градиентный алгоритмы.

Калмановское оценивание случайного сигнала [5, 6, 7]**.** Калмановское оценивание реализует рекурсивную процедуру адаптации, основанную на авторегрессионной модели процесса генерирования сигнала. Случайный и марковский сигнал $\mathrm{x}(n)$ можно представить в виде выхода линейной дискретной системы первого порядка, возбуждаемой белым шумом $\mathrm{w}(n)$ с нулевым средним и дискретной $\sigma^2{}_w$.

Модель генерирования сигнала описывается разностным уравнением первого порядка

$$\mathrm{x}(n) = \mathrm{ax(n-1)} + w(n-1)\,. \tag{1}$$

Структурная схема, соответствующая уравнению (1), представлена на рис. 1.



$w(n-1)$ - выборка белого шума; $x(n)$ - случайный сигнал на выходе; z^{-1} - задержка на период дискретизации; a - коэффициент усиления; $x(n-1)$ - выборка случайного сигнала с задержкой на период дискретизации

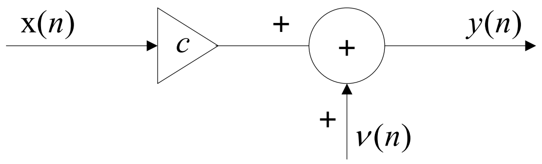
Рис. 1 – Устройство генерирования случайного сигнала.

Предполагаем, что после прохождения канала связи сигнал $x(n)$ имеет амплитудные изменения, описываемые постоянным коэффициентом c, и на него воздействовал белый шум $\nu(n)$ с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2{}_w$.

Модуль воздействия канала на сигнал описывается уравнением

$$y(n) = cx(n) + \nu(n). \tag{2}$$

Структурная схема, соответствующая (2), представлена на рис. 2.



$x(n)$ - сигнал на входе после прохождения канала связи; c - коэффициент усиления; $\nu(n)$ - белый шум; $y(n)$ - сигнал на выходе

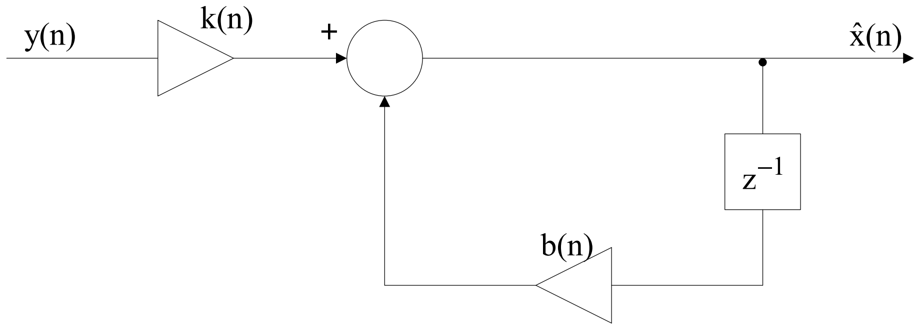
Рис. 2 – Модель прохождения сигнала по каналу связи.

Сигнал $y(n)$ затем поступает на вход синтезируемого адаптивного фильтра Калмана [6]. На его выходе необходимо получить рекуррентную оценку $\hat{x}(n)$, максимально близкую к $x(n)$ по критерию метода наименьших квадратов.

Рекурсивная формула оценки первого порядка имеет вид

$$\hat{x}(n) = b(n)\,\hat{x}(n-1) + k(n)\,y(n). \tag{3}$$

В общем случае $b(n)$ и $k(n)$ зависят от нормированного времени. Обобщенная структура схемы адаптивного оценивателя, реализующего алгоритм (3), представлена на рис. 3.



$y(n)$ - сигнал на входе; $\mathrm{k(n)}$ - коэффициент усиления входного сигнала; $\hat{\mathrm{x}}(n)$ - рекуррентная оценка; z^{-1} - задержка на период дискретизации; $\mathrm{b(n)}$ - коэффициент усиления задержанной рекуррентной оценки $\hat{\mathrm{x}}(n-1)$

Рис. 3 – Обобщенная структура рекурсивного оценивателя первого порядка.

Обозначим

$$\mathrm{e}(n) = \hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n}) - \mathrm{x}(\mathrm{n}), \tag{4}$$

$$\mathrm{p}(n) = E\left[\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n}) - \mathrm{x}(\mathrm{n})\right]^2, \tag{5}$$

где $\mathrm{e}(n)$ - ошибка оценки, $\mathrm{p}(n)$ - среднеквадратичная оценка. Из (3) и (5) имеем:

$$\mathrm{p}(n) = E\left[\mathrm{b(n)}\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1}) + k(n)y(n) - \mathrm{x}(\mathrm{n})\right]^2. \tag{6}$$

Для получения оптимального по выбранному критерию оценивателя выражение (6) дифференцируется по $\mathrm{b(n)}$ и $k(n)$, и результаты приравниваются к нулю:

$$\frac{\partial\,\mathrm{p}(n)}{\partial\,\mathrm{b(n)}} = 2E\left\{[\mathrm{b(n)}\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1}) + k(n)y(n) - \mathrm{x}(\mathrm{n})]\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})\right\} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{p}(n)}{\partial\,\mathrm{b(n)}} = 2E\left\{[\mathrm{b(n)}\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1}) + k(n)y(n) - \mathrm{x}(\mathrm{n})]y(\mathrm{n})\right\} = 0. \tag{8}$$

Преобразуем (7):

$$E\left\{[\mathrm{b(n)}\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})]\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})\right\} = E\left\{-[\mathrm{k(n)}y(\mathrm{n})] - \mathrm{x(n)}\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})]\right\}, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{b(n)}E\left\{[\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})] - \mathrm{x}(\mathrm{n-1}) + \mathrm{x}(\mathrm{n-1})]\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})]\right\} = \\ &= E\left\{[\mathrm{x(n)} - \mathrm{k(n)}y(\mathrm{n})]\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})]\right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Подставим в (10) значение $y(\mathrm{n})$ из (2) и (4), получим

$$\begin{aligned} &\mathrm{b(n)}E[e(n-1)\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1}) + \mathrm{x(n-1)}\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1}) = \\ &= E\left\{[\mathrm{x(n)}[1-\mathrm{ck(n)}] - \mathrm{k(n)}\nu(\mathrm{n})]\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})]\right\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Принцип ортогональности, минимизирующий ошибку [1], требует некоррелированности ошибки $e(n)$ и оценки $\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})$, а также независимости шума $\nu(\mathrm{n})$ и $\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})$, что выполняется в данном случае. Это означает, что

$$E[e(n)\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})] = 0 \tag{12}$$

и

$$E[\nu(n)\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})] = 0\ . \tag{13}$$

Уравнение (11) с учетом (12) и (13) примет вид

$$\mathrm{b(n)}E[\mathrm{x}(n-1)\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})] = [1-\mathrm{ck(n)}]E[\mathrm{x}(n)\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})]\,, \tag{14}$$

Подставим модель генерирования сигнала (1) в (14), получим

$$\mathrm{b(n)}E[\mathrm{x}(n-1)\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})] = [1-\mathrm{ck(n)}]E[\mathrm{ax}(n-1)\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1}) + \mathrm{w(n-1)}\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})]\,. \tag{15}$$

Из (1), (2) и (3) получаем

$$\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1}) = \mathrm{b(n-1)}\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-2}) + \mathrm{ack(n)(n-1)}\,\mathrm{x(n-2)} + \mathrm{ck(n-1)}\,\mathrm{w(n-2)} + \mathrm{k(n-1)}\nu(\mathrm{n-1})\,. \tag{16}$$

Умножим обе части (16) на $\mathrm{w(n-1)}$ и возьмем математическое ожидание

$$E[\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})\,\mathrm{w(n-1)}] = 0\,, \tag{17}$$

так как шум $\mathrm{w(n-1)}$ некоррелирован со всеми членами в правой части (16).

С помощью (17) преобразуем (15):

$$\mathrm{b(n)}E[\mathrm{x}(n-1)\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})] = a[1-\mathrm{ck(n)}]E[\mathrm{x}(n-1)\,\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1})]\,,$$

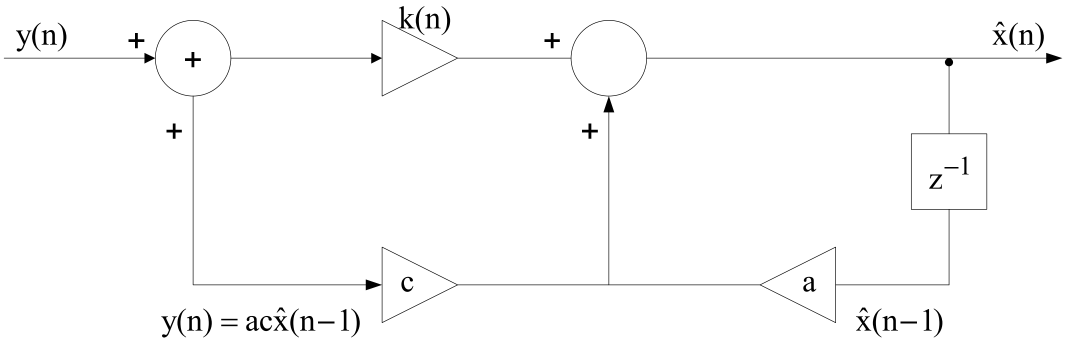
что приводит к соотношению между $\mathrm{b(n)}$ и $\mathrm{k(n)}$:

$$\mathrm{b(n)} = a[1-\mathrm{ck(n)}]\,. \tag{18}$$

Подставим (18) в (3), получим

$$\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n}) = \mathrm{a}\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n-1}) + \mathrm{k(n)}[\mathrm{y(n)} - \mathrm{ack(n-1)}]\,. \tag{19}$$

Уравнение (19) является искомым решением для построения адаптивного рекурсивного оценивателя первого порядка, называемого скалярным фильтром Калмана, структурная схема которого представлена на рис. 4.



$y(n)$ - сигнал на входе; $\mathrm{k(n)}$ - коэффициент усиления входного сигнала; c - коэффициент усиления; $\hat{\mathrm{x}}(n)$ - рекуррентная оценка; a - коэффициент усиления задержанной на период рекуррентной оценки $\hat{\mathrm{x}}(n-1)$

Рис. 4 – Скалярный фильтр Калмана.

Адаптация в этом устройстве оценки происходит следующим образом. Предыдущая оценка $\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n}-1)$ после умножения на а и с экстраполирует очередной отсчет зашумленного сигнала $\hat{\mathrm{y}}(\mathrm{n})$, который сравнивается с текущим отсчетом $\mathrm{y(n)}$.

Разница между ними с коэффициентом «доверия» $\mathrm{k(n)}$ суммируется с экстраполированной оценкой $\mathrm{a}\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n}-1)$, в результате чего получается текущая оценка $\hat{\mathrm{x}}(\mathrm{n})$. $\mathrm{k(n)}$ должен зависеть от шумовых параметров модели и текущего значения среднеквадратической ошибки $\mathrm{p(n)}$ [2]:

$$\mathrm{k(n)} = \frac{c[a^2 p(n-1) + \sigma^2{}_W}{\sigma^2{}_V + c^2\sigma^2{}_W + c^2 a^2 p(n-1)}, \tag{20}$$

где

$$\mathrm{p(n)} = \frac{1}{c}\sigma^2{}_V\,\mathrm{k(n)}. \tag{21}$$

Анализ (20) и (21) показывает на адаптивное изменение $\mathrm{k(n)}$ в зависимости от дисперсий действующих шумов $\sigma^2{}_V$ и $\sigma^2{}_W$, а также величины текущей среднеквадратической ошибки $\mathrm{p(n)}$.

Для перехода к векторному фильтру Калмана необходимо перейти к авторегрессионной модели генерирования сигнала более высокого порядка с последующей редукцией к многомерному пространству состояний.

Итерационные алгоритмы адаптации [4]**.** Синтез итерационных алгоритмов адаптации основывается на результатах математической теории оптимизации. Методы оптимизации приводят к детерминированным рекуррентным алгоритмам оптимизации, когда решение задачи отыскивается в результате конечного числа итерации путем последовательного приближения к оптимальному. Алгоритмы данного класса должны сходиться за конечное время к точке оптимума либо попадать в ее окрестность.

В результате использования итерационных алгоритмов получают последовательность значений искомого вектора $H(n)$, например, вектор коэффициентов цифрового фильтра, для которого значения функционала F отвечают соотношения

$$F[\mathrm{H}(0)] > \mathrm{F}[\mathrm{H}(1)] > ... > F[H(n) > ...$$

в случае минимизации (спуска) и

$$F[\mathrm{H}(0)] < \mathrm{F}[\mathrm{H}(1)] < ... < F[H(n) < ...$$

в случае максимизации (подъема).

Точка $\mathrm{H}(0)$ определяет начальные условия процесса оптимизации.

Процесс адаптации весового вектора Н при использовании любого итерационного алгоритма имеет вид [3]

$$\mathrm{H(n+1) = H(n)} + \mu(n)\overline{h}(n), \qquad (22)$$

где $\mu(n)$ - шаг итерации, $\overline{h}(n)$ - вектор, определяющий направление этого шага.

В зависимости от способа определения $\mu(n)$ и $\overline{h}(n)$ методы адаптации системы обработки сигналов можно разделить на три категории:

1. Методы прямого поиска, использующие только чистые значения функционала качества.

2. Методы, использующие дополнительно первые производные функционала качества.

3. Методы, использующие, кроме вышеуказанных, вторые производные функционала качества.

Методы прямого поиска применяются в случае, когда функционал качества не задан в явном виде и определение производных затруднено, имеются точки разрыва рабочей функции, наблюдается несколько локальных экстремумов.

Методы третьей категории боле быстрые по сравнению с другими, но они сложнее в алгоритмической реализации.

Наибольшее применение в адаптивной обработке сигналов нашли методы второй категории, основу которой в силу относительной простоты реализации составляют градиентные методы поиска экстремума.

Градиентные методы адаптации [3, 7]**.** При этом методе каждый последующий вектор $\mathrm{H(n+1)}$ выбирается в направлении - $\nabla\mathrm{F[H(n)]}$, где $\nabla\mathrm{F[H(n)]}$ - вектор-столбец частных производных функционала качества, называемый градиентом:

$$\Delta\,\mathrm{F[H(n)]} = \begin{bmatrix} \dfrac{dF}{dh_0} \\ \dfrac{dF}{dh_1} \\ . \\ . \\ . \\ \dfrac{dF}{dh_{N-1}} \end{bmatrix}. \qquad (23)$$

Процесс адаптации вектора $\mathrm{H(n+1)}$ [3]:

$$\mathrm{H(n+1)} = \mathrm{H(n)} - \mu \nabla F[H(n)]. \qquad (24)$$

Величина μ определяется из условий устойчивости и времени сходимости алгоритма.

Рассмотрим свойства градиентного метода, определив квадратичный функционал качества в виде

$$F(H) = \mathrm{H}^T RH, \qquad (25)$$

где R - положительно определенная симметричная матрица, либо автокорреляционная матрица конечной выборки отсчетов входного сигнала. При этом $F(H) \geq 0$ при любых H и достигает минимума при $H = \overline{0}$. Такое тривиальное решение неприемлемо в задачах обработки сигналов, так как вырождает любой адаптивный цифровой фильтр.

Градиент функционала качества (25) равен

$$\frac{dF(\mathrm{H})}{dH^T} = RH,$$

и в соответствии с (24)

$$H(n+1) = \mathrm{H(n)} - \mu\,\mathrm{RH(n)}. \qquad (26)$$

Представим (26) по итерационным шагам при любом векторе $H(0) \neq \overline{0}$:

$$\begin{aligned}
&H(1) = \mathrm{H}(0) - \mu\,\mathrm{RH}(0) = (1-\mu\,\mathrm{R})\,\mathrm{H}(0),\\
&H(2) = \mathrm{H}(1) - \mu\,\mathrm{RH}(1) = (1-\mu\,\mathrm{R})\,\mathrm{H}(1) = (1-\mu\,\mathrm{R})^2\,\mathrm{H}(0),\\
&.\\
&.\\
&.\\
&H(\mathrm{n}) = (1-\mu\,\mathrm{R})^n\,\mathrm{H}(0).
\end{aligned} \qquad (27)$$

Из (27) следует, что при условии $(1-\mu\,\mathrm{R}) = 0$ оптимальное значение $\mathrm{H}_0 = 0$ может быть достигнуто за один шаг в направлении - $\nabla\,\mathrm{F[H(0)]}$. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы $I - \mu R = 0$ или $R = 1/\mu$, т.е. матрица должна быть диагональной с элементом на главной диагонали, равными μ^{-1}, иначе для достижения оптимального результата потребуется большее число итераций.

Таким образом, из условия

$$RH(0) = \mu^{-1}\,\mathrm{H}(0) \qquad (28)$$

следует, что оптимальное решение возможно найти за один шаг адаптации. Для этого необходимо значение шага μ выбрать обратным одному из собственных чисел матрицы R, а H(0) - равным соответствующему вектору.

В [3] показано, что сходимость градиентных методов адаптации обеспечивается, если линии уровня функционала качества, соответствующие условию $F = const$, замкнуты вокруг точки экстремума при положительной определенности матрицы R.

Выводы. Таким образом, в статье проведено исследование рекуррентных алгоритмов адаптации калмановского оценивания, градиентного и итерационного алгоритмов при получении оценок случайных цифровых сигналов гидрометеорологической информации. Показано, что для продолжительных рядов отсчетов входного сигнала рассмотренные алгоритмы, вносящие коррекцию на каждом шаге итерационного процесса, являются оптимальными, позволяющими найти оптимальное решение за один шаг адаптации.

Список литературы

1. *Острем К.* Введение в стохастическую теорию управления. – М.: Мир, 1973. – 320 с.
2. Адаптивные фильтры / Под ред. *К.Ф.Н. Коуэна и П.М. Гранта.* – М.: Мир, 1988. – 240 с.
3. *Уидроу В., Стирнз С.* Адаптивная обробка сигналов. – М.: Радио и связь, 1989. – 480 с.
4. *Солонина А.И., Улахович Д.А., Яковлев Л.А.* Алгоритмы и процессоры обработки сигналов. – СПб.: БХВ – Петербург, 2001. – 180 с.
5. *Лимонов А.С., Пустовит Т.М., Лимонов А.А.* Экстраполяция дискретных сигналов с использованием фильтров Калмана // Український гідрометеорологічний журнал. – 2011. - №9. – С. 26-37.
6. *Лімонов О.С., Перелигін Б.В., Пустовіт Т.М.* Аналіз фільтра Калмана стосовно до відновлення ізогіпси при побудові карт цифрового рельєфу // Український гідрометеорологічний журнал. – 2012. - №11. – С. 58-67.
7. *Лімонов О.С., Перелигін Б.В., Пустовіт Т.М.* Реалізація фільтра Калмана для відновлення ізогіпс при побудові карт цифрового рельєфу // Український гідрометеорологічний журнал. – 2012. - №11. – С. 68-76.

Оцінювання випадкових сигналів гідрометеорологічної інформації з використанням рекурентних алгоритмів адаптації. Лімонов О.С., Пустовіт Т.М., Лімонов О.О.

В статті досліджуються рекурентні алгоритми адаптації для отримання оцінок випадкових сигналів гідрометеорологічної інформації.

Ключові слова: *рекурентні алгоритми, калманівський оцінювач,адаптація, градієнтний алгоритм, ітераційний алгоритм .*

Estimation of hydrometeorology random signals of digital data with using requrrent algorithms of adaptation. Limonov A.S., Pustovit T.M., Limonov A.A.

In article requrrent algorithms of adaptation for random signals of hydrometeorology data estimate obtaining are researched.

Key words: *requrrent algorithms, kalman estimator, adaptation, gradient algorithms, iteration algorithm.*