

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ ВЗВЕСИ В ВОДНОЙ СРЕДЕ

В статье приведены результаты поиска оптимальных параметров математических моделей неустановившейся турбулентной диффузии взвеси в водной среде. Оптимум найден при наиболее приемлемом с практической точки зрения количестве расчетов и при допустимой погрешности конечного результата. Получена аналогичная натурным наблюдениям картина изменения во времени концентрации мелких фракций взвеси в верхнем слое толщи воды после сброса.

Ключевые слова: математическая модель, неустановившаяся турбулентная диффузия, оптимальные параметры, взвесь, водная среда, натурные наблюдения.

Введение. В Украине, как и в большинстве других стран, основную часть преднамеренно сбрасываемых в море материалов составляет грунт. Дампинг грунтов в подводные отвалы осуществляется при строительстве, реконструкции, а также при эксплуатации портов и их подходных каналов. Объемы сбрасываемых грунтов на шельфе весьма значительны. Например, дампинг грунтов на Северо-Западном шельфе Черного моря составляет $5 \cdot 10^6$ т/год, а при ремонтном дноуглублении подходного канала Одесского порта извлекается 870 тыс. м³/год [1].

Дампинг грунтов на шельфе представляет собой природоохранную проблему: с одной стороны подводные отвалы занимают значительную площадь продуктивных участков дна; с другой – избыточная взвесь и другие загрязняющие вещества, поступающие в воду при сбросе грунта, ухудшают качество морской среды. В результате этого наносится ущерб водным биоресурсам, и могут измениться не в лучшую сторону санитарные условия водопользования.

При нормировании сбросов загрязнителей, при оценке качества вод и при оценке различных видов ущерба в числе основных задач можно назвать расчет максимального значения концентрации взвеси в контрольном створе, определение ее общей массы, вынесенной за пределы упомянутого створа, оценка площади заиления дна. Существующие в настоящее время методики [2, 3] расчета распространения взвеси не позволяют достоверно оценить эти характеристики. В научных трудах [4, 5] авторов данной статьи предложена математическая модель распространения взвеси при дампинге грунтов. Модель позволяет с малой погрешностью получить все перечисленные характеристики.

Цель настоящего исследования состоит в определении оптимальных параметров предложенной математической модели и сопоставлении результатов расчетов распространения взвеси с натурными наблюдениями.

Материалы и методы исследования. Дифференциальные уравнения неустановившейся турбулентной диффузии взвеси с гидравлической крупностью u в плоской (полярной системе координат) и пространственной (цилиндрической системе координат) постановке задачи можно записать в следующем виде [4, 5]:

$$\partial C / \partial t = D[(\partial^2 C / \partial r^2) + (1/r)(\partial C / \partial r)] - uC/H, \quad (1)$$

$$\partial C / \partial t = D[(\partial^2 C / \partial r^2) + (1/r)(\partial C / \partial r)] + D\partial^2 C / \partial y^2 - u\partial C / \partial y, \quad (2)$$

где C – концентрация вещества; t – время, отсчитываемое после сброса грунта;

D – коэффициент турбулентной диффузии; H – глубина акватории;
 r – радиус, расстояние от центра системы координат до рассматриваемой точки;
 Решение уравнений (1) и (2) методом конечных разностей имеет вид [4, 5]:

$$C_{k+1,n} = (1-2a-2f)C_{k,n} + a(bC_{k,n+1} + dC_{k,n-1}), \quad (3)$$

где $a = D\Delta t/\Delta r^2$; $b = 2n/(2n-1)$; $d = 2(n-1)/(2n-1)$; $f = u\Delta t/(2H)$,

$$C_{k+1,n,m} = (1-2a_1-2a_2)C_{k,n,m} + a_1(bC_{k,n+1,m} + dC_{k,n-1,m}) + (a_2-f)C_{k,n,m+1} + (a_2+f)C_{k,n,m-1}, \quad (4)$$

$$C_{k+1,n,1} = (1-2a_1-a_2-f)C_{k,n,1} + a_1(bC_{k,n+1,1} + dC_{k,n-1,1}) + (a_2-f)C_{k,n,2}, \quad (5)$$

$$C_{k+1,n,M} = (1-2a_1-a_2-f)C_{k,n,M} + a_1(bC_{k,n+1,M} + dC_{k,n-1,M}) + (a_2+f)C_{k,n,M-1}, \quad (6)$$

где $a_1 = D\Delta t/\Delta r^2$; $a_2 = D\Delta t/\Delta y^2$; $f = u\Delta t/(2\Delta y)$.

Индексом k обозначены моменты времени с шагом Δt , n – номера колец шириной Δr , m – номера слоев толщиной Δy .

Уравнение (3) – решение задачи в плоской постановке, уравнения (4)-(6) – в пространственной, причем: (4) – решение для толщи; (5) – для поверхностного и (6) – для придонного слоев.

Максимальная концентрация (C_{MAX}) и общая масса (M) взвеси в пятне загрязнения зависят от расстояния переноса (X), от скорости переноса (V), от интенсивности турбулентной диффузии (D), от пространственно-временных параметров модели (Δt , Δr и Δy), от гидравлической крупности частиц взвеси (u) и от глубины акватории (H). Эти переменные можно объединить в следующие безразмерные параметры:

в плоской постановке –

$$k = X/V\Delta t, \quad a = D\Delta t/\Delta r^2, \quad f = u\Delta t/2H; \quad (7)$$

в пространственной –

$$k = X/V\Delta t, \quad a_1 = D\Delta t/\Delta r^2, \quad a_2 = D\Delta t/\Delta y^2, \quad f = u\Delta t/2\Delta y, \quad m = H/\Delta y. \quad (8)$$

Особенность конечно разностных моделей состоит в том, что искомое значение величины зависит от исходных параметров модели. В случае плоской постановки задачи значения C_{MAX} и M на некотором удалении от места сброса зависят от начального ($t = 0$) количества колец в пятне загрязнения (n_0). При этом, чем больше n_0 (меньше Δr), тем ближе оценка к истинному значению величины. В случае пространственной постановки задачи C_{MAX} и M зависят еще и от количества слоев в облаке загрязнения (m_0).

Однако, увеличение начального количества колец (слоев) влечет за собой увеличение объема вычислений (в рассматриваемом случае, эта зависимость квадратичная: при увеличении n_0 (m_0) в два раза, объем вычислений увеличивается в четыре). Очень большое количество расчетов не имеет практического смысла, поскольку, начиная с некоторого момента, погрешность между оценкой и истинным значением становится достаточно малой (приемлемой с практической точки зрения) и дальнейшее снижение погрешности становится неоправданным из-за значительного увеличения количества расчетов. Поэтому задачей настоящего исследования является поиск оптимального решения, при котором точность оценки и количество расчетов были бы приемлемыми (сбалансированными).

Поиск оптимального решения в плоской постановке задачи выполнен при следующих условиях:

- исходное количество колец в пятне загрязнения n_0 принято равным 1;
- в соответствии с разработанной методикой параметр $a = const = 0,25$;
- из уравнений (7) видно, что при уменьшении Δr (увеличении n_0) в l раз условие $a = const$ будет выполнено, если количество шагов до контрольного створа ($k_{КС}$) и параметр f изменятся следующим образом:

$$k_{КС} \sim l^2 \quad \text{и} \quad f \sim 1/l^2;$$

- при выполнении всех расчетов сумма $(f+a) < 0,5$.

Поиск оптимального решения в пространственной постановке задачи выполнен при следующих условиях:

- исходное количество колец в пятне загрязнения $n_0 = 1$;
- исходное количество слоев по глубине m_0 принято равным 1;
- в соответствии с разработанной методикой параметр $a_2 = const = 0,125$;
- из выражений (8) видно, что условие $a_2 = const$ будет выполнено, если с уменьшением Δy (увеличении m_0) в l раз, параметры $k_{КС}$, a_1 и f будут изменяться следующим образом:

$$k_{КС} \sim l^2; \quad a_1 \sim 1/l^2 \quad \text{и} \quad f \sim 1/l;$$

- при выполнении всех расчетов сумма (a_1+a_2) должна быть меньше 0,5 и f должно быть меньше a_2 .

Оптимальное решение для плоской (пространственной) постановки задачи найдено в такой последовательности:

- задано исходное количество шагов во времени Δt до контрольного створа (КС) (опыт расчетов, выполненных ранее, показал, что при $n_0 = 1$ ($m_0 = 1$) и расстоянии до контрольного створа 500 м необходимое количество шагов Δt в среднем составляет 10);
- при заданном значении f определены $C_{МАХ}$ и M в 10-й момент времени (в контрольном створе);
- далее при $n_0 = 2$ ($m_0 = 2$, соответствующем n_0) и параметре f , сниженном в 4 раза, смоделирован процесс, и на 40 шаге (количество шагов по сравнению с предыдущим расчетом увеличено в 4 раза) найдены новые значения $C_{МАХ}$ и M ;
- расчеты выполнены при $n_0 = 1 \div 8$ и $f = 0,0 \div 0,2$ ($m_0 = 1 \div 5$, $f = 0,0 \div 0,1$ и соответствующих n_0).

Результаты исследований и их анализ. Расчеты $C_{МАХ}$ и M выполнены в горизонтальной плоскости и в пространстве согласно вышеуказанным последовательности и условиям. Концентрация взвеси в начальном створе принята равной 1000‰.

Результаты проведенных расчетов в горизонтальной плоскости сведены в табл. 1 и 2, а в пространстве – в табл. 3 и 4. В табл. 1 и 2 в первом столбце помещено начальное количество колец в пятне, в табл. 3 и 4 – начальное количество слоев по глубине. Во втором столбце в обоих случаях помещено количество шагов во времени до контрольного створа ($k_{КС}$).

Из табл. 1 и 2 видно, что значения максимальной концентрации ($C_{МАХ}$) и общей массы взвеси в пятне загрязнения (M) в контрольном створе плавно возрастает до $n_0 = 5$, после чего стабилизируются и практически не изменяются. Это говорит о том, что для расчета распространения взвеси оптимальным является разбиение пятна загрязнения на 5 колец. При таком разбиении пятна расчет распространения взвеси

будет иметь погрешность менее 5% (табл. 1 и 2). Если рассматривать каждый случай по отдельности, то при $f = 0$ и 0,1 для снижения количества расчетов первоначальное количество колец в пятне можно брать 2-3, а при $f = 0,2$ – 4-5.

Таблица 1 – Значения C_{MAX} и ее погрешности δ в КС

n_0	$k_{КС}$	$f = 0,0$		$f = 0,1$ (при $n_0 = 1$)		$f = 0,2$ (при $n_0 = 1$)	
		$C_{MAX}, \text{‰}$	$\delta, \%$	$C_{MAX}, \text{‰}$	$\delta, \%$	$C_{MAX}, \text{‰}$	$\delta, \%$
1	10	90,91	4,401	7,809	38,95	0,334	80,47
2	40	94,08	1,069	11,51	10,04	1,256	26,55
3	90	94,68	0,437	12,26	4,144	1,515	11,40
4	160	94,898	0,215	12,53	2,040	1,612	5,731
5	250	94,99	0,111	12,66	1,063	1,659	2,982
6	360	95,04	0,056	12,72	0,532	1,684	1,520
7	490	95,07	0,022	12,76	0,211	1,700	0,585
8	640	95,09	0,000	12,79	0,000	1,710	0,000

Таблица 2 – Значения M и его погрешности δ в пятне загрязнения в КС

n_0	$k_{КС}$	$f = 0,1$ (при $n_0 = 1$)		$f = 0,2$ (при $n_0 = 1$)	
		$M, \text{‰}$	$\delta, \%$	$M, \text{‰}$	$\delta, \%$
1	10	10,737	20,414	0,605	66,556
2	40	12,851	4,744	1,478	18,297
3	90	13,232	1,920	1,671	7,629
4	160	13,364	0,941	1,741	3,759
5	250	13,425	0,489	1,773	1,990
6	360	13,458	0,245	1,791	0,995
7	490	13,478	0,096	1,802	0,387
8	640	13,491	0,000	1,809	0,000

Из табл. 3-4 видно, что значения максимальной концентрации в контрольном створе (C_{MAX}) и общего количества взвеси в пятне загрязнения (M) возрастают до $m_0 = 2-3$, после чего стабилизируются и практически не изменяются. Это говорит о том, что для расчета распространения взвеси оптимальным является разбиение облака загрязнения по глубине на 2-3 слоя при $n_0 = 1$. При таком разбиении пятна расчет распространения взвеси будет иметь погрешность меньше 5% (табл. 3-4).

Таблица 3 – Значения C_{MAX} и ее погрешности δ в КС

m_0	$k_{КС}$	$f = 0,0$ (при $m_0 = 1$)		$f = 0,1$ (при $m_0 = 1$)	
		$C_{MAX}, \text{‰}$	$\delta, \%$	$C_{MAX}, \text{‰}$	$\delta, \%$
1	10	90,909	54,075	7,809	61,643
2	40	194,304	1,843	19,086	6,254
3	90	196,713	0,626	19,911	2,201
4	160	197,560	0,199	20,216	0,702
5	250	197,953	0,000	20,359	0,000

Таблица 4 – Значения M и его погрешности δ в пятне загрязнения в КС

m_0	$k_{КС}$	$f = 0,1$ (при $m_0 = 1$)	
		$M, \text{‰}$	$\delta, \%$
1	10	10,737	-31,099
2	40	8,640	-5,495
3	90	8,340	-1,832
4	160	8,230	-0,488
5	250	8,190	0,000

Для демонстрации преимуществ предлагаемой математической модели рассмотрим результаты экспедиционных исследований, проведенных в районе свалки грунта у о. Экви в Финском заливе в сентябре 1983 г. [6].

Наблюдения проводились на отвале с глубиной 90 м. Толща воды была стратифицирована, глубина верхнего квазиоднородного слоя (ВКС) составляла около 25 м. Пробы на взвесь отбирались в центре дрейфующего пятна мутности в средней части ВКС (горизонт 10 м). Полученные в результате эксперимента данные о концентрации взвеси представлены на рис. 1.

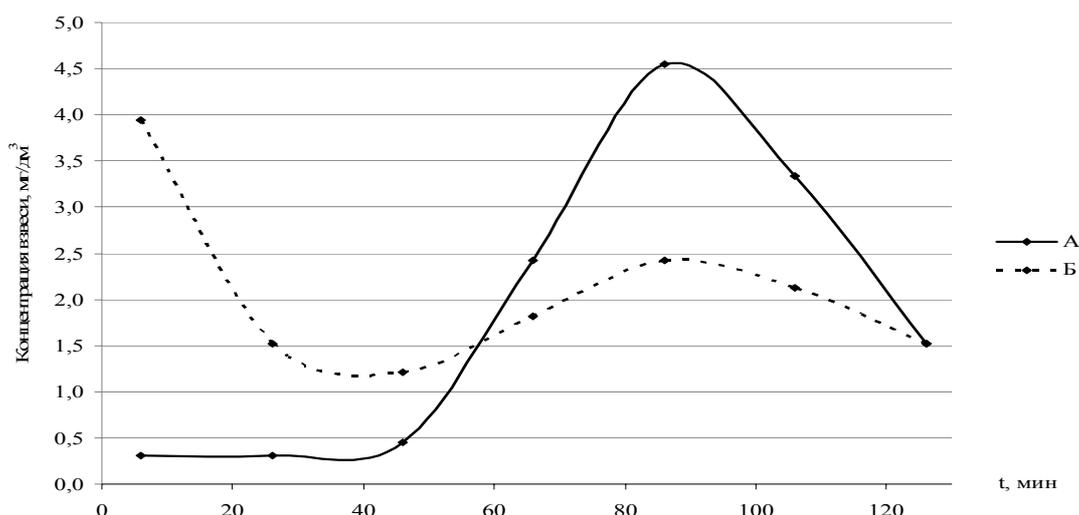


Рис. 1 – Изменения концентрации фракций взвеси А (0,025-0,05 мм) и Б (0,05-0,1 мм) во времени на горизонте 10 м (результаты наблюдений [6])

Из рис. 1 видно, что на горизонте 10 м заметен вторичный пик содержания фракций взвеси А и Б. Это привело к увеличению общего содержания взвеси в верхнем слое. Данное явление, по мнению авторов [6], может быть связано:

во-первых, с разрушением нестабильных агрегатов, состоящих из мелких частиц (в основном фракции А), такие агрегаты могли образоваться в процессе консолидирования донных отложений в месте забора грунта;

во-вторых, с процессами выноса взвешенного вещества вверх из нижних несущих слоев (термоклина и придонного).

На наш взгляд второе объяснение является более правдоподобным.

На предлагаемой модели, в отличие от существующих моделей в плоской постановке задачи, представляется возможным исследовать появление вторичного пика концентрации взвеси в верхнем слое за счет ее выноса из нижних слоев.

Возрастание концентрации взвеси в верхнем слое через некоторое время после сброса происходит в том случае, если в начальный момент времени ее содержание сильно увеличивается с глубиной. Сопоставление результатов моделирования с натурными наблюдениями оказалось невозможным из-за отсутствия в работе [6] сведений о значениях концентрации фракций взвеси после сброса, о гидравлической крупности частиц в морской среде и о гидродинамических условиях во время наблюдений. Однако общая картина изменения концентрации взвеси во времени на модели получилась похожей на натурную (рис. 2).

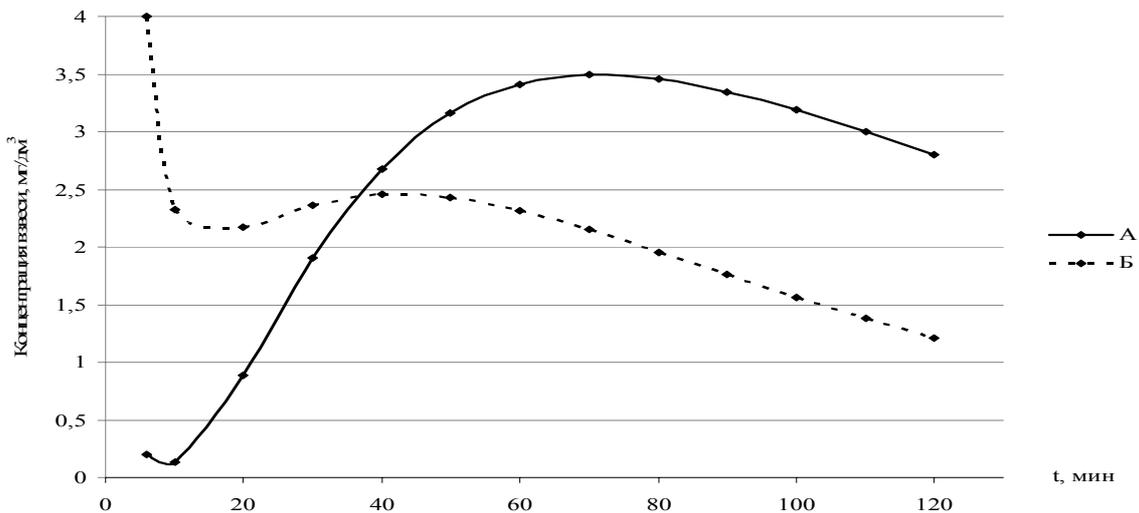


Рис. 2 – Изменение концентрации фракций взвеси в верхнем слое (расчет)

Рассмотрим вторичное увеличение содержания взвеси на примере фракции Б (рис. 2), предположив, что ее концентрация в придонных слоях (7-10) составляет 100 мг/дм^3 , а в средних и верхних – 4 мг/дм^3 . Пример расчета по формулам (4)-(6) при $f = 0,08$ приведен в табл. 5. Количество слоев до дна было принято равным 10. В начальный момент времени ($k = 0$) количество колец в пятне (N_0) – 4.

В рассматриваемом случае за счет турбулентной диффузии со временем происходит подъем взвеси в верхние слои ($k = 0, 1, 2, \dots$). При этом ее общая масса в области загрязнения снижается из-за оседания на дно. Концентрация взвеси в поверхностном слое до некоторого момента времени ($k = 10$) убывает, достигая минимума ($2,18 \text{ мг/дм}^3$). Далее она начинает возрастать и достигает максимума на 40-й ($k = 20$) минуте, равного $2,46 \text{ мг/дм}^3$ (табл. 5). В последующие моменты времени концентрация взвеси снижается (рис. 2).

Таблица 5 – Распределение взвеси в облаке загрязнения в разные моменты времени (k) при сбросе

n	2n-1	b	d	$C_{k,n,m}, \text{ мг/дм}^3$									
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k = 0$													
1	1	2,00	0,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	104,0	104,0	104,0	104,0
2	3	1,33	0,67	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	104,0	104,0	104,0	104,0
3	5	1,20	0,80	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	104,0	104,0	104,0	104,0
4	7	1,14	0,86	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	104,0	104,0	104,0	104,0

Продолжение табл. 5

n	2n-1	b	d	$C_{k,n,m}$, мг/дм ³									
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k = 10$													
1	1	2,00	0,00	2,18	3,51	5,82	9,76	16,11	25,39	37,48	51,20	64,17	72,85
2	3	1,33	0,67	2,18	3,51	5,82	9,76	16,11	25,39	37,48	51,19	64,16	72,85
3	5	1,20	0,80	2,17	3,50	5,81	9,74	16,08	25,34	37,40	51,08	64,02	72,69
4	7	1,14	0,86	2,04	3,29	5,46	9,16	15,10	23,77	35,05	47,85	59,96	68,07
5	9	1,11	0,89	0,10	0,17	0,27	0,47	0,78	1,25	1,88	2,58	3,25	3,69
6	11	1,09	0,91	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02	0,03	0,05	0,07	0,08	0,09
7	13	1,07	0,92	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$k = 20$													
1	1	2,00	0,00	2,46	3,84	5,96	9,06	13,35	18,93	25,62	32,83	39,47	43,87
2	3	1,33	0,67	2,46	3,84	5,95	9,05	13,35	18,93	25,61	32,82	39,45	43,85
3	5	1,20	0,80	2,44	3,81	5,91	8,98	13,25	18,78	25,41	32,56	39,14	43,50
4	7	1,14	0,86	2,18	3,40	5,26	8,00	11,79	16,70	22,58	28,91	34,75	38,61
5	9	1,11	0,89	0,22	0,34	0,53	0,81	1,20	1,71	2,33	3,00	3,62	4,03
6	11	1,09	0,91	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,09	0,12	0,16	0,19	0,21
7	13	1,07	0,92	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01

Пик содержания более мелкой фракции А наблюдается примерно на 70 минуте. Его значение гораздо выше и превосходит начальное содержание более чем в семь раз. При равномерном либо при малом изменении содержания взвеси по глубине вторичный пик отсутствует.

Из сказанного видно, что разработанная модель адекватно реагирует на начальные условия. Это подтверждает правильность и логичность полученных зависимостей.

Выводы.

1. При моделировании процесса распространения вещества в плоской постановке задачи погрешность оценки максимальной концентрации вещества и его общей массы в контрольном створе составит не более 5 % при сравнительно небольшом объеме расчетов, если:

- при $f = 0$ начальное количество колец в пятне загрязнения принять равным 2-3;
- при $f = 0,1$ – 3-4;
- при $f = 0,2$ – 4-5.

В этом случае ожидаемое количество шагов во времени до контрольного створа соответственно равно 40-90, 90-160 и 160-250.

2. В пространственной постановке задачи оптимальное количество слоев по глубине, необходимое для расчетов при различных значениях f , составит 2-3.

В этом случае ожидаемое количество шагов во времени до контрольного створа будет равным соответственно 40-90.

3. Разработанная модель позволяет исследовать турбулентную диффузию взвеси по вертикали и получить вторичный пик ее содержания в верхнем слое после сброса грунта за счет выноса этой взвеси из нижних слоев.

4. Наличие вторичного пика концентрации взвеси в верхнем слое в большей степени обусловлено значительным увеличением ее содержания по глубине сразу после сброса.

5. Дальнейшие исследования необходимо направить на разработку инженерной методики расчета распространения взвеси при дампинге грунтов.

Список литературы

1. Ларченков Е.Л., Чередниченко А.Л. Влияние геологических процессов на экологическое состояние Северо-Западного шельфа Черного моря // Геоэкология рекреационных зон Украины. – К.: КРУ, 1996. – С. 71-784.
2. Гончаров А.А., Кравчук М.А., Цвезинский А.С. Оперативный метод расчета распространения взвеси в районе дампинга грунтов в приливном море // Труды ГОИН. – 1985. – Вып. 174. – С. 98-107.
3. Прозоров А.А. Методика расчета зоны короткопериодного воздействия дампинга грунтов дноуглубления // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Санкт-Петербург, 2000. – 19 с.
4. Юрасов С.Н., Горун В.В. Математическая модель неустойчивой турбулентной диффузии взвеси в водном потоке // Метеорологія, кліматологія та гідрологія: Межвід. наук. збірник України / Голов. ред. С.М. Степаненко. – Одеса: Вид. “ТЕС”, 2010. – Вип. 51. – С. 189-199.
5. Горун В.В. Методика розрахунку розповсюдження завислої речовини у водному середовищі при залпових скидах // Вода: проблеми і шляхи вирішення: Збірник матеріалів III-ї Всеукраїнської науково-практичної конференції (21-22 грудня 2010 року). – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – С. 27-29.
6. Саарсо М.В., Гончаров А.А. Об изменении гранулометрического состава взвеси в поле повышенной мутности, образующемся при дампинге грунтов // Итоги исследований в связи со сбросом отходов в море. – М.: Гидрометеиздат, 1988. – С. 56-63.

Оптимізація параметрів математичної моделі несталої турбулентної дифузії завислої речовини у водному середовищі.

Горун В.В., Юрасов С.М.

У статті наведені результати пошуку оптимальних параметрів математичних моделей несталої турбулентної дифузії завислої речовини у водному середовищі. Знайдений оптимум при найбільш прийнятних з практичної точки зору похибці кінцевого результату і кількості розрахунків. Отримана аналогічна натурним спостереженням картина часового ходу значень концентрації фракцій завислої речовини у верхньому шарі товщі води після скиду.

Ключові слова: математична модель, нестала турбулентна дифузія, оптимальні параметри, зависла речовина, водне середовище, натурні спостереження.

Optimization of parameters of the mathematical model of unsteady turbulent diffusion suspensions in the aquatic environment.

V. Gorun, S. Yurasov

In the article the results of search for optimum parameters for the mathematical models of unsteady turbulent diffusion of suspended matter in water environment are given. The optimum is found at the most acceptable from a practical point of view error of the final result and the number of calculations. The general picture of the time dependence for fractions of suspended matter concentrations in the upper layer after dumping was received similar to field observations.

Keywords: mathematical model, turbulent diffusion, suspended matter, optimum parameters, water environment, field observations.