УДК 519.24.001.57

Н.Г.Сербов, *к.г.н.,доц.,* **А.А. Свинаренко**, *к.ф.-м.н.,доц.,* **Д.Е. Сухарев**, *к.ф.-м.н.,доц.,*
А.А. Дудинов, *асс.*
Одесский государственный экологический университет

МНОГОФАКТОРНОЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ФЛУКТУАЦИЙ РАСХОДОВ ВОДЫ И КОНЦЕНТРАЦИЙ НИТРАТОВ р.ОНДАВА

На основе мультифрактального формализма с использованием алгоритма Грассбергера-Прокаччиа выполнены оценки фрактальных характеристик временных рядов флуктуаций расходов воды и концентраций нитратов для р. Ондава.
Ключевые слова: *мультифрактальное моделирование, расход воды, концентрация нитратов, фрактальная размерность*

Введение. В последние годы для решения многочисленных актуальных задач гидрологии и гидроэкологии широко применяются методы моделирования как характеристик речного стока, так и характеристик загрязнения водных систем, базирующиеся на фрактальных и мультифрактальных моделях (см., напр., [1-16]). В отличие от классических гидродинамических или вероятностно-стохастических методов мультифрактальные модели в приложении к отдельным классам задач обладают целым рядом достоинств, в том числе, достаточно высокой степенью корректности и прогнозируемости. Известные статистические и, разумеется, динамические модели расчета и прогноза характеристик речного стока, базирующиеся на использовании уравнений типа Сен-Венана, либо Навье-Стокса, обладают весьма важными достоинствами, но их корректная реализация по-прежнему далека от удовлетворительного уровня. Методы мультифрактального моделирования оказываются для ряда задач более предпочтительными, особенно, если речь идет о моделировании нелинейных динамических систем, к которым, естественно, можно отнести речные (водные) системы. Разумеется, главная задача теории - предсказание эволюции состояния системы во времени и пространстве. Одним из замечательных свойств нелинейных динамических систем является смена режимов их функционирования при изменении управляющих параметров. Уместно напомнить, что динамические системы могут демонстрировать бифуркации и катастрофы. Один режим теряет устойчивость, гибнет, ему на смену приходит другой и т.д. В нелинейных динамических системах, как было установлено сравнительно недавно, возможны режимы колебаний, близкие по характеристикам к случайным процессам, включая явление детерминированного хаоса. Для нелинейных динамических систем, как правило, применение стандартного преобразования Фурье не может обеспечить более менее удовлетворительный результат в противоположность случаю линейной системы. Дело в том, что процессы, приводящие к хаотическому режиму, являются фундаментально многомерными. Поэтому необходимо восстанавливать фазовое пространство системы, как можно лучше используя информацию, содержащуюся в характеристике системы, описываемой величиной, скажем, $s(n)$. Этот процесс реконструкции приведет некоему набору d-мерных векторов $\mathbf{y}(n)$, которые заменят наблюденные скалярные данные, и заключается в сочетании динамических концепций о нелинейных системах, как о генераторах информации, и геометрических представлений о том, как обнаружить аттрактор при помощи координат, определенных на основе их информационно-теоретического содержания. В таком рассмотрении важнейшей задачей теории является оценка фрактальных характеристик соответствующих временных рядов для динамических параметров речных (водных) систем. Цель настоящей работы – мультифрактальное моделирование характеристик временных рядов флутуаций расходов воды и концентраций нитратов для р. Ондава (с оценкой величин фрактальных размерностей) в период с 1 ноября 1987г. по 31 октября 1988г. Отметим, что данная работа продолжает исследования, начатые в работах [9-13].

Мультифрактальный подход. Поскольку искомый подход детально излагался в ряде известных публикаций (см., напр.[1-6]), здесь мы ограничимся лишь изложением основных блоков нашего метода расчета, следуя работам [4,13-16] (пакет "Geomath"). Для вычисления фрактальных характеристик временных рядов флуктуаций динамических величин систем обычно используется классическая версия мультифрактального формализма, центральный объект которого - мультифрактальный спектр [1]. Для однородных фракталов соответствующий скейлинг описывается одной фрактальной размерностью. Неоднородные объекты обычно характеризуются спектром $D(q)$ фрактальных размерностей (фрактальная размерность равна $D(0)$, а функция $D(q)$, собственно говоря, и трактуется как мультифрактальный спектр). Ключевая задача мультифрактального подхода (вычисления мультифрактального спектра) сводится к нахождению сингулярного спектра $f(\alpha)$ меры μ.. Последний ассоциирует хаусдорфову размерность с сингулярным показателем α, что позволяет вычислить степень сингулярности $N_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^{-f(\alpha)}$, где $N_\alpha(\varepsilon)$ есть число гиперкубов, необходимых для того, чтобы охватить меру и ε-размер каждого гиперкуба. Функция распределения Z извлекается из этого спектра

$$Z(q,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)} \quad \text{for} \quad \varepsilon \to 0. \tag{1}$$

Здесь $\tau(q)$ есть спектр, который может быть получен путем преобразованием Лежандра сингулярного спектра $f(\alpha)$. Далее из спектра $\tau(q)$ может быть получен спектр обобщенных фрактальных размерностей

$$D_q = \frac{\tau(q)}{(q-1)}. \tag{2}$$

В отличие от классического подхода к вычислению спектра фрактальных размерностей, на наш взгляд, более эффективным в вычислительном отношении оказывается метод Грассбергера-Прокаччиа [6] (метод корреляционной размерности). В целом ряде работ этот подход с успехом использован при решении целого ряда задач гидрометеорологии, гидроэкологии, геофизики и т.д. [1-8,15-20]. Заметим, что этот подход оказывается крайне удобным при решении задачи прогнозирования эволюции динамической системы, на одном из этапов решения которой возникает задача восстановления фазового пространства. Задача определения размерности вложения предполагает восстановление настолько большого Евклидова пространства R^d, чтобы весь ряд точек размерности d_A мог быть развернут без какой-либо неопределенности. Согласно положениям теоремы вложения важно иметь такую размерность d_E, чтобы она была больше d_A, тогда как выбор $d_E < d_A$ неприемлем в любом случае. Другими словами, не нужно искать размерность d_A, а можно взять какую-ту заведомо большую размерность d_E. Например, в случае низкоразмерного хаоса можно априори задать размерность вложения 10 или даже 15, что с точки зрения математики будет вполне приемлемо. Разумеется, при этом возникает ряд известных проблем. Поэтому нужно отыскать именно размерность d_A. Хотя методик, позволяющих восстановить размерность аттрактора достаточно много (см., например, [2-4]), одной из наиболее широко используемых при исследовании наличия хаоса во временных рядах является именно метод Грассбергера-Прокаччиа [6]. Этот метод использует корреляционный интеграл функции $C(r)$ для того, чтобы найти различия между хаотическими и стохастическими системами, и определяемый как

$$C(r) = \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N(n-1)} \sum_{\substack{i,j \\ (1\le i<j\le N)}} H\left(r - \| \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j \|\right), \tag{3}$$

где H – ступенчатая функция Хевисайда, $H(u) = 1$ для $u > 0$ и $H(u) = 0$ для $u \le 0$;
r – радиус сферы с центром в $\mathbf{y}_i$ или $\mathbf{y}_j$;
N – длина временного ряда.

Если временной ряд характеризуется аттрактором, то корреляционный интеграл $C(r)$ соотносится с радиусом r посредством

$$d_2 = \lim_{\substack{r\to 0 \\ N\to\infty}} \frac{\log C(r)}{\log r}, \tag{4}$$

где d_2 – корреляционная размерность, которую можно определить как наклон линии в координатах $\log C(r)$ и $\log r$ посредством среднеквадратического подбора прямой линии в некотором диапазоне r, называемом диапазоном масштабирования.

Если корреляционная размерность достигает насыщения на некотором значении размерности вложения, то динамика системы в целом рассматривается как хаотическая. Значение корреляционной размерности, при котором она достигает насыщения, определяется как корреляционная размерность аттрактора (d_A). Ближайшее целое число большее, чем d_2, дает оптимальную (необходимую) размерность вложения d_E для реконструкции фазового пространства или количество переменных, необходимых для моделирования динамики системы. В настоящее время имеется целый ряд численных кодов для мультифрактального моделирования на PC (см., напр., [1-4]).

Результаты расчета и выводы. Ниже приведены результаты мультифрактального моделирования характеристик временных рядов флуктуаций расходов воды и концентраций нитратов для р. Ондава (с оценкой величин фрактальных размерностей) в период с 1 ноября 1987г. по 31 октября 1988г. В частности, изучались флуктуационные тренды в изменении ежедневных расходов воды и значений концентраций нитратов в залесенном водосборе Манело и ежедневные значения концентраций нитратов в равнинном водосборе Бабье Детальное описание соответствующих водосборов, а также наборов данных дано в работах [11,12]. Соответствующие детальные эмпирические ежедневные данные по расходам и концентрациям нитратов для р. Ондава (Восточная Словакия) в период с 1 ноября 1987г. по 31 октября 1988г представлены на рис.1. Наши оценки показали, что поведение временного ряда значений искомых характеристик для р.Ондава удовлетворяет основным критериям феномена детерминистического хаоса. Для исследованных водосборов соответствующие фрактальные размерности, характеризующие флуктуационные временные ряды как концентраций нитратов, так и ежедневных расходов воды, лежат в интервале [1.3-1.9]. Этот любопытный феномен, по нашему мнению, является аналогом более фундаментального феномена генезиса фрактальных размерностей в родственных (фрустрированных) динамических системах [18-20]. Разумеется, полученные в данной работе результаты могут быть использованы как исходная основа для решения последующей задачи восстановления и прогнозирования флуктуационных изменений расходов, речного стока, а также концентраций загрязняющих веществ в речной воде в

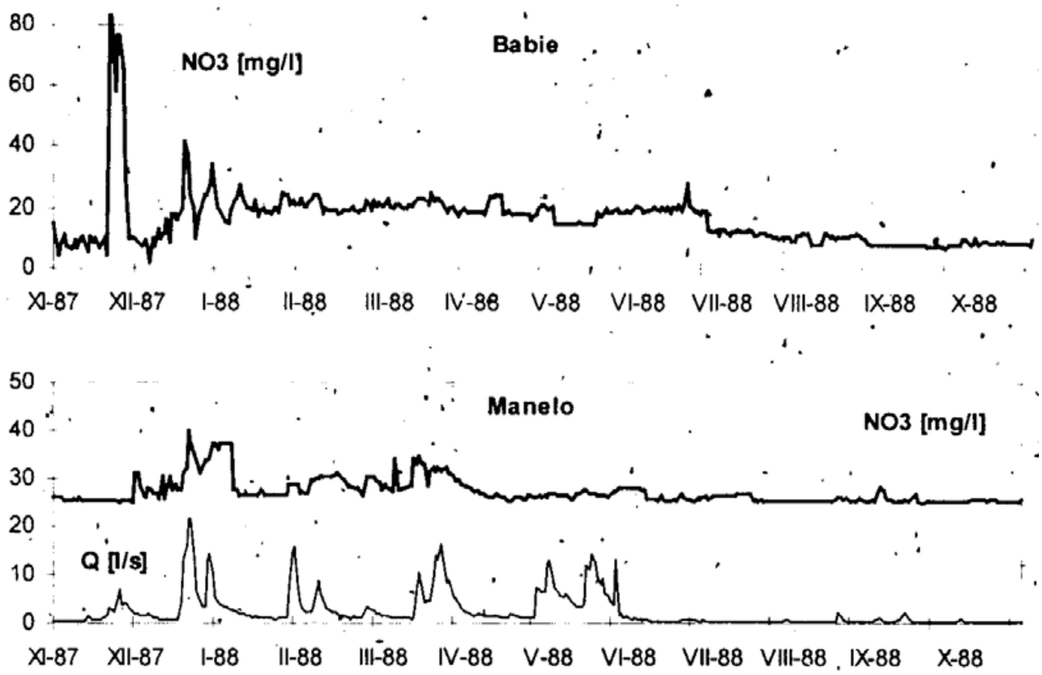

Рис. 1 – Эмпирические данные по расходам и концентрациям нитратов для р. Ондава (Восточная Словакия) в период с 1 ноября 1987г. по 31 октября 1988г.

любом интересующем временном интервале. Естественно, для этого потребуется более детальное восстановление спектра размерностей Ляпунова, а также размерности Калана-Йорка, энтропии Колмогорова и т.д. (см., напр., [4, 18-20]).

Список литературы

1. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы: Пер. с англ. - М.: Институт компьютерных исследований, 2002.-670с.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. - М.: Физматлит, 2001.-250с.
3. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова В.Е.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем.- М.: Наука, 2003.-340с.
4. *Глушков А.В., Бунякова Ю.Я.* Анализ и прогноз влияния антропогенных факторов на воздушный бассейн промышленного города.- Одесса: Экология, 2010.- 256с.
5. *Islam M.N., Sivakumar B.* Characterization and prediction of runoff dynamics: a nonlinear dynamical view// Adv.Water Res.-2002.-V.25, № 2- P.179-190.
6. *Grassberger P, Procaccia I.* Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D.-1983.-Vol.9,№1-2.-P.189-208.
7. *Лобода Н.С.* Формализм функций памяти и мультифрактальный подход в задачах моделирования годового стока рек и его изменений под влиянием факторов антропогенной деятельности// Метеорология, климатология и гидрология.-2002.-№45.-С.140-146.
8. *Maftuoglu R.F.* New models for non-linear catchment's analysis// Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands).-1984.-Vol.73.-P.335-357.
9. *Maftuoglu R.F.* Monthly runoff generation by non-linear models// Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands).-1991.-Vol.125.-P.277-291.
10. *Kothyari U., Arvanmuthan V., Singh V.* Monthly runoff generation using the linear perturbation model// Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands).-1993.-Vol.144.-P.371-379.

11. *Pekarova P., Miklanek P., Konicek A., Pekar J.* Water quality in experimental basins.- Nat. Rep.1999 of the UNESKO.-Project 1.1.-Intern.Water Systems.-1999.-98p.
12. *Svoboda A., Pekarova P., Miklanek P.* Flood hydrology of Danube between Devin and Nagymaros in Slovakia.- Nat. Rep.2000 of the UNESKO.-Project 4.1.-Intern.Water Systems.-2000.-96p.
13. *Loboda N.S., Glushkov A.V., Khokhlov V.N.* Using meteorological data for reconstruction of the annual runoff series over an ungauged area: Empirical orthogonal functions approach to Moldova-Southwest Ukraine region//Atmospheric Research (Elsevier; The Netherlands). -2005.-Vol.77.-P.100-113.
14. *Глушков А.В., Сербов Н.Г., Балан А.К. , Лукаш Т.В.* Многофакторный системный и мультифрактальный подходы в моделировании годового стока (р. Дунай) //Вісник Одеського державного екологічного ун-ту.-2009.-N7.-P.186-191.
15. *Глушков А.В., Лобода Н.С., Хохлов В.Н., Сербов Н.Г., Свинаренко А.А., Бунякова Ю.Г.* Хаос во временных рядах концентраций загрязняющих веществ в атмосфере: краткосрочный прогноз// Вестник ОГЭКУ.-2008.-N5.-С.225-235.
16. *Сербов Н.Г., Сухарев Д.Е., Балан А.К. , Дудинов А.А.* Моделирование экстремально высоких паводков и временных флуктуаций концентраций загрязняющих веществ в речной воде// Вісник Одеського держ. екологічного ун-ту.-2011.-N11.-С.172-177.
17. *Сербов Н.Г., Балан А.К., Соляникова Е.П.* Многофакторный системный и мультифрактальный подходы в моделировании экстремально высоких паводков (на примере р. Дунай) и временных флуктуаций концентраций загрязняющих веществ в речной воде// Вісник ОДЕКУ.- 2008.-№6.-С.7-13.
18. *Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Serbov N.G., Zhurbenko K.* Signatures of low-dimensional chaos in hourly water level measurements at coastal site of Mariupol, Ukraine// Stoch. Environment Res. Risk Assess. (Springer).-2008.-Vol.22,N6.-P.777-788.
19. *Khokhlov V.N., Glushkov A.V., Loboda N.S., Bunyakova Yu.Ya.* Short-range forecast of atmospheric pollutants using non-linear prediction method// Atmospheric Environment (Elsevier).-2008.-Vol.42.-P. 7284–7292.
20. *Glushkov A.V., Loboda N.S., Khokhlov V.N., Lovett L.* Using non-decimated wavelet decomposition to analyse time variations of North Atlantic Oscillation, eddy kinetic energy, and Ukrainian precipitation // Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands). – 2006. – Vol. 322,№1-4.–P.14-24.

Багатофакторне мультифрактальне моделювання характеристик часових рядів флуктуацій розходів води та концентрацій нітратів р. Ондава.

Сербов М.Г., Свинаренко А.А., Сухарев Д.Є., Дудінов О.А.

На підставі мультифрактального формалізму з використанням алгоритму Грассбергера-Прокаччіа виконані оцінки фрактальних характеристик часових рядів флуктуацій розходів води та концентрацій нітратів для р. Ондава.

***Ключові слова**: мультіфрактальне моделювання, розхід води, концентрація нітратів, фрактальна розмірність*

A multi-factor multi-fractal modelling characteristics of the water discharges and nitrate concentration fluctuation temporal sets for the Ondava river.

Serbov N.G., Svinarenko A.A., Sukharev D.E., Dudinov A.A.

It is carried out modelling river characteristics of the water discharges and nitrate concentration fluctuation temporal sets for the Ondava river within a multi-fractal formalism with using the Grassberger-Procaccia algorithm.

***Kew words**: multifractal modeling, water discharge, nitrate concentration, fractal dimension*