УДК 621.372.852
А.С. Лимонов, *к.т.н.*
Одесский государственный экологический университет

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СКАЛЯРНЫХ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕРЕКУРСИВНОЙ И РЕКУРСИВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ВИНЕРА

В статье исследуются возможности оптимальной оценки скалярных сигналов в скалярных фильтрах Винера.
Ключевые слова: *средняя квадратичная ошибка, нерекурсивный фильтр, рекурсивный фильтр, оптимальный.*

Введение. Фильтрации Винера, описываемые в виде дифференциальных уравнений, применяются в компьютерной цифровой обработке [1, 2]. Многие авторы в своих работах рассматривали различные варианты применения фильтров Винера. Недостаточно рассмотренными являются вопросы, связанные с линейной теорией оценок в дискретно-временной области для данных фильтров [2, 3, 4].

Материалы и методы исследования. В статье рассматривается методика исследования структур цифровых фильтров Винера с использованием критерия минимума средней квадратичная ошибки, скалярной фильтрации Винера.

Научная новизна статьи заключается в представлении оптимальной оценки скалярных сигналов в скалярных фильтрах Винера.

Цель данной статьи – исследование возможностей скалярных фильтров Винера для получения оптимальных оценок обрабатываемых сигналов.

Изложение основного материала статьи.

Средняя квадратичная ошибка [4] позволяет оценить качество процесса оценки. В данной статье средняя квадратичная ошибка взята как основной критерий. Оценки, минимизирующие среднюю квадратичную ошибку, представляются как оптимальные.

Рассмотрим обработку скалярного сигнала со случайным распределением его постоянного параметра в нерекурсивном фильтре Винера.

На выходе нерекурсивного фильтра оценка сигнала определяется как

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{m} h(i)\, y(i)\,, \tag{1}$$

где $y(1)$, $y(2)$, …, $y(m) - m$ выборок сигнала.

Коэффициент передаточной характеристики $h(i) = 1, 2, \ldots, m$ имеют одинаковые веса $\sim \frac{1}{m}$.

Коэффициенты $h(i)$ выбираются так, чтобы средняя квадратичная ошибка была минимальной:

$$P_e = E(e^2) = E(x - \hat{x})^2\,,$$

или

$$P_e = E\left[\, x - \sum_{i=1}^{m} h(i)\, y(i) \right]^2. \tag{2}$$

Минимальна средняя квадратичная ошибка определяется как результат дифференцирования:

$$\frac{\partial P_e}{\partial h(j)} = -2E\left[x - \sum_{i=1}^{m} h(i)y(i)\right] \cdot y(j) = 0\,, \tag{3}$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} h(i)E\left[y(i)Y(j)\right] = E\left[xy(j)\right],\ j = 1,2,...,m\,. \tag{4}$$

Соответственно

$$E\left[e \cdot y(j)\right] = 0\,, \tag{5}$$

где $e = x - \hat{x}$ - ошибка.

Из (4) следует, что

$$E\left[y(i) \cdot y(j)\right] = P_{xy}(j) \tag{6}$$

- это автокорреляционная функция выборок. Для нестационарного процесса она определяется как $P_y(i,j)$, а для стационарного процесса – как $P_y(j-i)$. В результате

$$E[x \cdot y(j)] = P_{xy}(j) \tag{7}$$

является кросс-корреляцией между случайной переменной x и выборкой $y(j)$. При этом уравнение (4) представится как

$$\sum h(i) \cdot P_y(i,j) = P_{xy}(j)\,,\quad j = 1,2,...,m\,. \tag{8}$$

Для $i = 1,2,...,m$ имеем:

$$\begin{gathered} P_y(1,j)h(1) + P_y(2,j)h(2) + P_y(m,j)h(m) = P_{xy}(j)\,, \\ P_y(1,m)h(1) + P_y(2,m)h(2) + P_y(m,m)h(m) = P_{xy}(m)\,, \end{gathered} \tag{9}$$

где $P_y(i,j) = P_y(j,i)$, так как P_y симметрична.

Известные значения – это $P_y(i,j)$, автокорреляционные коэффициенты входных величин, и $P_{xy}(j)$, коэффициенты кросс–корреляции между желаемой выходной величиной x и входными выборками y.

Неизвестные величины - $h(i)$, весовые коэффициенты оптимального фильтра.

Оптимальному решению будет соответствовать минимальная средняя квадратичная ошибка:

$$P_e = E(e^2) = E\left\{e\left[x - \sum_i h(i)y(i)\right]\right\} = E(ex),$$

или

$$P_e = E(x^2) - \sum_{i=1}^{m} h(i)P_{xy}(i), \tag{10}$$

в соответствии с (7).

Полное решение проблемы оценки с помощью нерекурсивного скалярного фильтра Винера дается набором уравнений (9), уравнение оценки (1) и соответствующей минимальной средней квадратичной ошибки из уравнения (10).

Матричная форма этих трех уравнений

$$P_y \cdot h = P_{xy}, \tag{11}$$

где P_y – $(m \times m)$ корреляционная матрица;

h и p_{xy} – $(m+1)$ столбцовые векторы.

Формальное решение уравнения (11)

$$h = P_y^{-1} \cdot p_{xy}. \tag{12}$$

Соответственно уравнение оценки (1) представляется как

$$\hat{x} = h^T y, \tag{13}$$

где h и y - $(m+1)$ столбцовые векторы, а h^T - вектор-строка.

В результате

$$\hat{x} = P_{xy}{}^T \cdot P_y{}^{-1} \cdot y, \tag{14}$$

и для минимальной средней квадратичной ошибки

$$P_e = E(x^2) - P_{xy}{}^T \cdot P_y{}^{-1} \cdot P_{xy}, \tag{15}$$

так как матрица P_y симметрична.

Уравнение (12) используется также в теории управления, где минимальная средняя квадратичная оценка используется для систем идентификации [5].

Рассмотренный нерекурсивный фильтр известен как фильтр Винера, уравнение (8) известно как скалярное уравнение Винера-Хопфа. Результат анализа показывает, что если в выборках сигнала $y(i)$, $i = 1,2,\ldots,m$ присутствует неизвестная случайная величина сигнала x, то наилучшей операцией линейной фильтрации над выборками является их обработка фильтром Винера [4].

Однако данному способу оценки с помощью фильтра Винера присущи следующие недостатки:

- требуется предварительное знание (или набор оценок) автокорреляционной матрицы P_y;
- количество выборок m, используемых в обработке, должно быть определено заранее;
- если m изменяется в процессе обработки (например меняется объем выборок), то вычисления должны быть повторены;
- требуется преобразование $(m \times m)$ матрицы P_y. Для больших m требуется большое компьютерное время для вычислений.

С целью обеспечения возможности оценки большого количества информации и сокращения времени обработки предлагается другая схема фильтрации с использованием рекурсивного процессора.

При этом для данной последовательности выборок $y(k) = x + \upsilon(k)$ производится линейная обработка $\hat{x} = \sum_{i=1}^{k} h(i) y(i)$ с $P_e = E(x - \hat{x})^2$ по возможности с наименьшей выборкой.

Для k выборок результат обработки представляется как

$$\hat{x} = \hat{x}(k) = \sum_{i=1}^{k} h(i) y(i), \tag{16}$$

где $h_i = \dfrac{1}{k + \gamma}$ с соответствующей средней квадратичной ошибкой

$$P_e = p(k) = E\left[x - \hat{x}(k)\right]^2 = \frac{\sigma^2 \upsilon}{k + \gamma}, \tag{17}$$

где $\gamma = \dfrac{\sigma^2 \upsilon}{\sigma^2 x}$.

Такая оценка производится после обработки k выборок.

Для $(k+1)$ выборок оценка и средняя квадратичная ошибка соответственно равны :

$$\hat{x}(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} h(i) y(i), \quad h(i) = \frac{1}{(k+1) + \gamma}, \tag{18}$$

$$p(k+1) = \frac{\sigma^2 \upsilon}{(k+1) + \gamma}. \tag{19}$$

Здесь коэффициенты h_i более корректно представлять как $h(i,k)$.

Из уравнения (16) имеем $h(i,k) = \dfrac{P(k)}{\sigma^2 \upsilon}$, и соответственно $h(i,k+1) = p(k+1) / \sigma^2 \upsilon$.

Из отношений $\dfrac{P(k+1)}{p(k)} = \dfrac{h(i,k+1)}{h(i,k)} = \dfrac{k+\gamma}{k+1+\gamma} = \dfrac{1}{1 + 1/(k+\gamma)}$ имеем

$$\frac{P(k+1)}{P(k)} = \frac{1}{1+P(k)/\sigma^2\upsilon}. \tag{20}$$

Из этих уравнений следует, что по данным $P(k)$ должны производится вычисления для $P(k+1)$, затем для $P(k+2)$ и так далее. Таким образом мы определили простой алгоритм для определения изменения средней квадратичной ошибки в зависимости от количества выборок. Из уравнения (16) и (18) находим оценку сигнала $\hat{x}(k+1)$ после обработки $(k+1)$ выборок

$$\hat{x}(k+1) = \frac{P(k+1)}{P(k)}\hat{x}(k) + \frac{P(k+1)}{\sigma^2\upsilon}\cdot y(k+1). \tag{21}$$

Это - рекурсивное оценочное уравнение, которое вместе с уравнением (20) определяет алгоритм работы рекурсивного фильтра. Процедура заключается в нахождении $P(k+1)$ из уравнения (20) в величинах $P(k)$. Затем, из известных значений $\hat{x}(k)$ и новых выборок информации $y(k+1)$ рассчитываем $\hat{x}(k+1)$. Эта процедура последовательно вырабатывает лучшие минимальные оценки для x и, в то же время, дает соответствующую среднюю квадратичную ошибку $P(k+1)$. Заметим, что в этом случае $P(k) \to 0$ для очень больших значений k.

Для начала рекурсивного процесса мы должны рассчитать первую оценку $\hat{x}(1)$, основанную на единичном обзоре нерекурсивными методами. Сравнивая рекурсивный алгоритм (21) с рекурсивным фильтром

$$g(k) = y(k) + ag(k-1), \tag{22}$$

видим, что это такая же форма, только с переменными во времени коэффициентами:

$$a(k+1) = \frac{P(k+1)}{P(k)} \quad \text{и} \quad b(k+1) = \frac{P(k+1)}{\sigma^2\upsilon}. \tag{23}$$

Алгоритм (21) представляется как

$$\hat{x}(k+1) = a(k+1)\hat{x}(k) + b(k+1)y(k+1). \tag{24}$$

Из уравнений (20) и (23) соотношение параметров имеет вид:

$$a(k+1) = 1 - b(k+1) \tag{25}$$

и, соответственно,

$$\hat{x}(k+1) = \hat{x}(k) + b(k+1)\left[y(k+1) - \hat{x}(k)\right]. \tag{26}$$

Структурные схемы по алгоритму (24) представлена на рис. 1а, а по алгоритму (26) – на рис. 1б.

а)

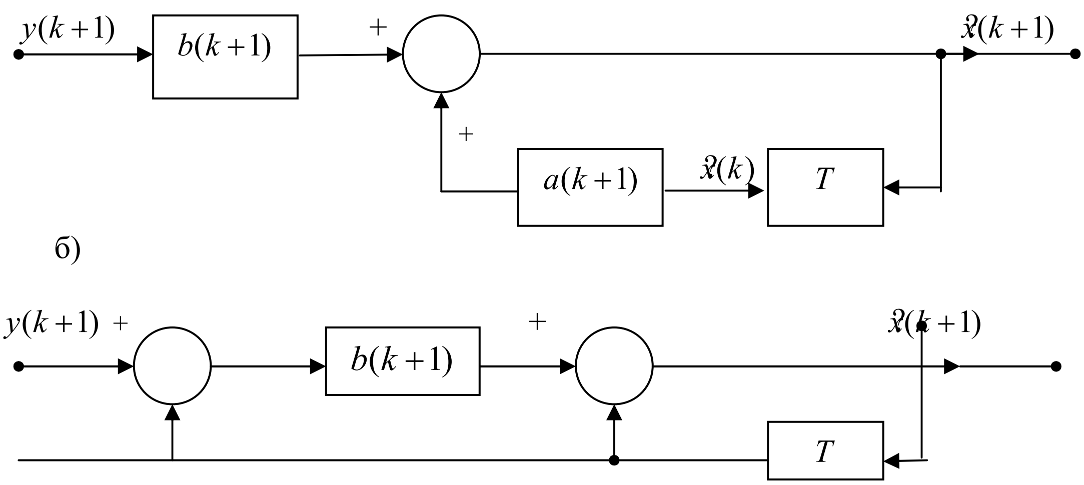

Рис. 1 – Структурные схемы:
а) рекурсивный фильтр (определенный из нерекурсивного уравнения фильтрации); б) эквивалентная форма.

Заключение.

1. В результате проведенных исследований рекурсивный фильтр синтезирован из уравнений для нерекурсивной фильтрации.

2. Такой же результат получается с использованием рекурсивного фильтра, имеющего два параметра $a(k+1)$ и $b(k+1)$, и обеспечивающего минимизацию средней квадратичной ошибки оценки.

Список литературы

1. *Viadyanathan P.P.* Multirate Systems and Filter Banks. Prentice Hall/ Engewood Cliffs. NY, 1993. – 405 с.

2. *Аоки М.* Введение в методы оптимизации. - М.: Наука, 1997. – 200 с.

3. *Infeachor E. C., Jervis B. W.* Digital Signal Processing. Prentice Hall/ 2001. – 664 с.

4. *Уидроу В., Стирнз С.* Адаптивная обработка сигналов. - М.: Радиосвязь, 1989. – 248 с.

5. *Mendel J. M.* Discrete techniques of parameter estimation. Dekker, 1973. – 257 с.

Оптимальна оцінка скалярних сигналів з використанням нерекурсивної і рекурсивної фільтрації Вінера. Лімонов О.С.

В статті досліджується можливість оптимальної оцінки скалярних сигналів в скалярних фільтрах Вінера.

Ключові слова: *середня квадратична помилка, нерекурсивний фільтр, рекурсивний фільтр, оптимальний.*

Optimum estimation of scalar signals with using of recursive and nonrecursive Wiener filtering. Limonov A. S.

Abilities of scalar Wiener filters for optimal estimation of processed are investigated.

Keywords: *Rootmean square error, nonrecursive filter, recursive filter, optimal.*