

УДК 519.24.001.57

Н.Г. Сербов, к.г.н.

Одесский государственный экологический университет

МНОГОФАКТОРНЫЙ СИСТЕМНЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ "ФИТОПЛАНКТОН – ЗООПЛАНКТОН - РЫБА"

В рамках развиваемого нами нового метода описания водно-биоресурсных систем, базирующегося на многофакторном системном моделировании, аппарате стохастических дифференциальных уравнений и мультифрактальном формализме, сформулирована стохастическая модель описания динамики пространственно - временных планктонных структур и плавания косяков питающейся планктоном рыбы.

***Ключевые слова:** метод многофакторного системного моделирования, стохастические уравнения, планктонные структуры, динамика системы "планктон-рыба"*

Введение. Разработка высоко эффективных, адекватно отражающих физику водно-биоресурсных и гидроэкологических систем, математических моделей, обладающих достаточно высокой степенью корректности и прогнозируемости, по-прежнему относится к числу ключевых задач современной гидроэкологии и теории водно-биоресурсных систем [1-9]. К числу крайне актуальных задач указанного направления относится задача моделирования пространственно-временных планктонных структур и описания динамики плавания косяков питающейся планктоном рыбы. Ввиду очевидной сложности искомого класса задач прогресс в развитии адекватных моделей долгое время отсутствовал. Фактически, до недавнего времени проблема описания динамики системы типа «планктон-рыба» сводилась к использованию аппарата простейших обыкновенных дифференциальных уравнений эволюционного типа. Первые простейшие модели описания изменчивости во времени видового состава планктона, вызванного сезонными изменениями, восходят к известным работам Лотки и Вольтерра [5-7] и основаны на трофических взаимодействиях типа "хищник - жертва" между зоопланктоном и фитопланктоном. Начало современному математическому моделированию процессов, лежащих в основе продуктивности фитопланктона, было положено в работах 70-х годов прошлого столетия (см., напр., [2-8] и ссылки там). Коллекция наиболее часто используемых моделей недавно была представлена Медвинским и др. [8]. К числу продвинутых следует отнести, разумеется, известную модель Флеминга [5,6], которая в рамках аппарата обыкновенных дифференциальных уравнений описывает динамику биомассы фитопланктона и позволяет прогнозировать изменение плотности фитопланктона (цветения водоемов) со стороны зоопланктона. К числу простейших альтернативных подходов следует отнести, например, просто построение функций с использованием данных, полученных в ходе наблюдений, а также приложение классических уравнений Лотки-Вольтерра с целью описания взаимоотношений "хищник-жертва" между зоопланктоном и фитопланктоном [2-5,8]. Более реалистичная модель динамики процесса потребления фитопланктона зоопланктоном, учитывающая функциональную зависимость этого потребления от плотности фитопланктона, была предложена еще Ивлевым, а затем несколько модифицировано в работах Мэйзода и Пуле (см., напр.,

[5,8,9]). Разумеется, следует также упомянуть и простейшие математические выражения, хорошо известные из моделей с насыщением Моно и Микаэлиса-Ментен, предназначенных для исследования ферментативной кинетики. При этом наблюдаемые изменения во времени сводятся к хорошо известным для системы "хищник-жертва" устойчивым осцилляциям, а также к осцилляторной или монотонной релаксации к одному из многих возможных устойчивых состояний.

Очевидно, что математические модели популяционной динамики планктона должны принимать во внимание не только рост и взаимодействие, но также пространственные процессы, такие, как случайные или направленные, совместные или друг относительно друга движения отдельных видов, а также изменчивость окружающей среды. Широко распространена точка зрения, в соответствии с которой именно взаимодействие фитопланктона и зоопланктона наряду с переносом организмов порождает все разнообразие пространственно-временных планктонных структур, в частности, пятнистость планктона (см., например, [5-8]). Для математического моделирования этих феноменов необходимо использовать уравнения типа "реакция-диффузия" и, возможно, уравнения адвекции.

Еще более сложной является динамика образования пространственно - временных планктонных структур и плавания косяков питающейся планктоном рыбы. Естественным подходом, разумеется, является подход, аналогичный описанию системы фитопланктон-зоопланктон, и базирующийся на детерминистическом аппарате обычных дифференциальных уравнений или дифференциальных уравнениях в частных производных. Проблема, которая здесь возникает, связана часто с невозможностью рассматривать индивидуальное целенаправленное поведение моделируемых видов в окружающей их среде, а также их взаимную адаптацию и восходит к работе Голландом по разработке концепции сложных адаптивных систем вместе с развитием моделирования стратегий индивидуального поведения [7,8]. Стандартное алгоритм, лежащий в основе такого подхода, состоит в том, что несколько так называемых "агентов" ведут себя в соответствии с весьма ограниченным набором определенных правил, которые задают рост, взаимодействие и движение этих агентов, а также их взаимодействие с окружающей средой. Набор этих правил, определенный на некоторой микрошкале, может обуславливать возникновение временных, пространственных, пространственно-временных или функциональных макроструктур. Эта концепция легла в основу первых моделей для исследования динамики взаимодействующих популяций рыбы и планктона. Подобная концепция находит адекватное обоснование в теории клеточных автоматов и теории нейронных сетей (см., напр., [10-12]). В рамках так называемой гибридной модели моделируется взаимный контроль пространственно-временной непрерывной динамики двух взаимодействующих и пространственно распределенных популяций (фитопланктон и зоопланктон) и задаваемого правилами поведения дискретного агента (рыбного косяка). Сюда же относится и задача описания агрегации отдельных рыб и сохранения косяков под давлением окружающей среды или социальных и т.д. факторов. Наиболее обоснованной в настоящее время является так называемая четырехкомпонентная модель "питательный субстрат-фитопланктон-зоопланктон-рыба", которая базируется на использовании аппарата обычных дифференциальных уравнений (см., напр., [8]). В последние годы значительный прогресс в изучении стохастических динамических систем связывается с применением новых методов теории хаоса, фрактальной геометрии, аппарата стохастических дифференциальных уравнений (см., напр., [1,7,8,13-18]). Естественным развитием стандартной детерминистической или полудетерминистической (с элементами хаоса) модели, очевидно, может быть формулировка модели типа фоккер-планковской [14] к описанию динамики системы "питательный субстрат- фитопланктон- зоопланктон-

рыба" [18-20]. Цель нашей работы заключается в развитии нового подхода к моделированию динамики водно-биоресурсных систем, базирующегося на многофакторном системном моделировании, аппарате стохастических дифференциальных уравнений и мультифрактальном формализме, и, в частности, стохастическому моделированию пространственно - временных планктонных структур и динамики плавания косяков питающейся планктоном рыбы [18-20]. Ниже мы сформулируем соответствующую стохастическую модель фоккер-планковского типа. В следующей работе будут приведены результаты численного моделирования.

Стохастическая модель для системы "фитопланктон-зоопланктон-рыба". Мы стартуем со стандартной четырехкомпонентной модели "питательный субстрат-фитопланктон – зоопланктон - рыба", в рамках которой динамика популяций фитопланктона $P(X, Y, \tau)$ и питающегося фитопланктоном зоопланктона $H(X, Y, \tau)$ в любой точке (X, Y) и в момент τ задается следующими уравнениями следующего типа [7,8]:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \tau}\right) = RP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - \frac{AC_1}{C_2 + P}H + D_p \Delta P, \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{C_1 P}{C_2 + P}H - MH - F \frac{H^2}{C_3} + D_H \Delta H. \quad (2)$$

В уравнениях (1), (2) параметры R, K, M и $1/A$ определяют соответственно собственную скорость роста и ограничение на прирост биомассы фитопланктона, скорость гибели зоопланктона и эффективность ассимиляции им пищи. Константы C_1, C_2 и C_3 задают ограничения на прирост биомассы зоопланктона; F — скорость потребления зоопланктона рыбой; D_p и D_H — коэффициенты диффузии фито- и зоопланктона соответственно; Δ — двумерный лапласиан. Изменение массы фитопланктона в результате его потребления зоопланктоном описывается функциональной реакцией II типа, в то время как потребление зоопланктона рыбой описывается так называемой сигмоидальной функциональной реакцией III типа, что соответствует известным предположениям модели Шеффера [2,5].

Локальная кинетика модели, т.е. кинетика в предположении $D_p=D_H=0$, детально исследовалась в ряде работ (см., напр., [2-5]). В отсутствие зоопланктона насыщающее значение плотности фитопланктона равно K . Динамически зоопланктон может индуцировать типичные для системы "хищник-жертва" осцилляции, порождаемые предельным циклом, а добавление эффектов, связанных с питающейся зоопланктоном рыбой и учитываемых последним кинетическим слагаемым в уравнении (2), восстанавливает возможность существования бистабильного состояния. В отсутствие внешнего или внутреннего шума начальное состояние системы определяет, какое из двух стационарных состояний будет реализовано. Это находит естественное пояснение в рамках известной теоремы Колмогорова-Арнольда-Мозера (см. [14]). Флуктуации, которые могут быть связаны с естественными шумами, равно как возможные экстремальные события, могут индуцировать переходы от одного стационарного состояния к другому. Эволюция параметров модели при учете сезонных изменений, в частности, связанных с естественной вариабельностью температуры, освещенности, запасов пищи и рядом других факторов, рассмотрена в [5,8]. При этом локальные предельные циклы, характерные для системы "хищник-жертва", могут трансформироваться в квазипериодические и хаотичные осцилляции, а локально стационарные состояния просто будут осциллировать с частотой, задаваемой внешним воздействием. Отдельный вопрос связан с учетом гидродинамических факторов (сил и

т.д.) и индуцированных ими пространственно-временных распределений потоков. Указанные выше, а также некоторые дополнительные факторы (см. [8,14,15]) удобно определить параметрами, напр., q_F и q_h . Хорошо известно, что гидродинамические процессы, как правило, протекают более быстро по сравнению с биологическими процессами, характерными для планктона. В этом случае очевидной оказывается возможность применения техники разделения переменных [7].

Модель (1), (2) стандартно упрощается путем введения безразмерных переменных. В частности, стандартными безразмерными параметрами являются плотности $p = P/K$ и $h = AH/K$. Пространственная шкала задается характерной длиной L/k , которая равна общей длине L рассматриваемой области, деленной на целое число k , определяющее масштаб моделируемых пространственных структур. Время масштабируется характерным значением скорости роста фитопланктона R_0 . Таким образом,

$$x = \frac{kX}{L}, \quad y = \frac{kY}{L}, \quad t = \tau R_0.$$

В этом случае уравнения (1), (2) преобразуются к классическому виду:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = rp(1-p) - \frac{ap}{1+bp}h + d_p \Delta p, \quad (3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{ap}{1+bp}h - mh - f \frac{gh^2}{1+g^2h^2} + d_h \Delta h, \quad (4)$$

где новые параметры определяются следующим образом:

$$r = \frac{R}{R_0}, \quad a = \frac{C_1 K}{C_2 R_0}, \quad b = \frac{K}{C_2}, \quad m = \frac{M}{R_0},$$

$$f = \frac{F}{C_3 R_0}, \quad g = \frac{K}{C_3 A}, \quad d_p = \frac{k^2 D_p}{L^2 R_0}, \quad d_h = \frac{k^2 D_H}{L^2 R_0}.$$

Обобщение модели (3), (4) в обобщенном фоккер-планковском приближении [19,20] видоизменяет искомую систему к виду:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = rp(1-p) - \frac{ap}{1+bp}h + q_F \nabla p + d_p \Delta p, \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{ap}{1+bp}h - mh - f \frac{gh^2}{1+g^2h^2} + q_h \nabla h + d_h \Delta h. \quad (6)$$

Для численного интегрирования уравнений (5), (6) естественно использовать одну из конечно-разностных схем (см., напр., [21]). В следующей работе мы рассмотрим решение системы (5),(6) и дадим общий анализ динамики системы “планктон-рыбный косяк”, формирования пространственно-временных планктонных структур в результате движения рыбного косяка и оценим различия решений систем (3,4) и (5,6).

Список литературы

1. Haken H. Synergetics. An Introduction. (Springer Series in Synergetics).-Berlin: Springer, 1977.-Vol.1.
2. Gulland J.A., ed. Fish populations dynamics.-London: Wiley, 1987.

3. Радаков Д.В. Стайность рыб как экологическое явление.-Москва: Наука, 1972.
4. Steele J.H. Fisheries Mathematics.-London: Academic Press, 1977.
5. Raymont J.E.G. Plankton and productivity in the oceans.- Oxford: Pergamon Press, 1983.
6. Sommer U. Planktologie.- Berlin: Springer, 1996.
7. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика.-Москва: Наука, 1984.
8. Медвинский А.Б., Петровский С.В., Тихонова И.А., Тихонов Д.А., Ли Б.-И., Вентурино Э.И., Мальхё Х., Иваницкий Г.Р. Формирование пространственно-временных структур, фракталы и хаос в концептуальных экологических моделях// Усп.Мат. Наук.-2002.-Т.172.-С.31-64.
9. Ивлев В.С. Экспериментальная экология питания рыб.- Киев: Наукова Думка, 1955.
10. Глушков В.М. Теория клеточных автоматов. – Киев: Наукова Думка, 1963.
11. Глушков А.В., Лобода А.В., Свиначенко А.А. Теория нейронных сетей на основе фотонного эха и их программная реализация.-Одесса: ТЕС, 2003.
12. Khetselius O.Yu., Glushkov A.V., Serbov N.G., Svinarenko A.A., Buyadzhi V.V. Dynamics of multi-layers neural networks on basis of photon echo: Effects of chaos and stochastic resonance// Proc.of the International Conference on Statistical Physics.-Crete (Greece).-2008.-P.31.
13. Mandelbrot B.B. The fractals geometry of nature.-San-Francisco: W.H.Freeman, 1982.
14. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика.-М.:Мир, 1978.
15. Лобода Н.С. Формализм функций памяти и мультифрактальный подход в задачах моделирования годового стока рек и его изменений под влиянием факторов антропогенной деятельности// Метеорология, климатология и гидрология.-2002.-№45.-С.140-146.
16. Глушков А.В., Балан А.К., Баланюк Е.П. Метод многофакторного системного и мультифрактального моделирования в задачах расчета экстремальных гидрологических явлений//Ecology of Siberia, the Far East and the Arctic.-2003.-V.2.-P.113-118.
17. Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Serbov N.G., Zhurbenko K. Signatures of low-dimensional chaos in hourly water level measurements at coastal site of Mariupol, Ukraine// Stochastic Environment Res. Risk Assess. (Springer).-2008.-Vol.22,N6.-P.777-788.
18. Глушков А.В., Хохлов В.Н., Сербов Н.Г., Свиначенко А.А., Солонко Т.В. Обобщенная динамико-стохастическая модель глобального цикла углерода: роль биоты в глобальном цикле углерода// Вестник ОГЭКУ.-2008.-№6.-С.234-239.
19. Glushkov A.V., Svinarenko A.A., Khetselius O.Yu., Serbov N.G. The sea and ocean 3D acoustic waveguide: rays dynamics and chaos phenomena//Journal of Acoust. Soc. America (USA).-2008.-123, N5.-P. 3625-3628.
20. Glushkov A.V., Svinarenko A.A., Khetselius O.Yu., Serbov N.G. The sea and ocean 3D acoustic waveguide: stochastic modeling and chaos phenomena// Proc.of the Chaotic modeling and Simulation International Conference (CHAOS2008).-Chania Crete (Greece).-2008.-P.25.
21. Глушков А.В., Сербов Н.Г., Хецилюс О.Ю., Дубровская Ю.В., Флорко Т.А. Прикладная математика (спец. Водные биоресурсы).- Одесса: Экология, 2009.-152С.

Багатофакторний системний стохастичний підхід до моделювання динаміки системи "фітопланктон - зоопланктон-риба". Сербов М.Г.

В межах нового методу опису водно-біоресурсних систем, який нами розвивається і який базується на багатофакторному системному підході, апараті стохастичних диференціальних рівнянь та мультифрактальному формалізмі, сформовано стохастичну модель опису динаміки просторово-часових планктонних структур та плавання косяків риби, яка харчується планктоном.

Ключові слова: метод багатофакторного системного моделювання, стохастичні рівняння, планктонні структури, динаміка системи "планктон-риба".

A multi-factor systems stochastic approach to modelling a dynamics of a system "phitoplankton-zooplankton-fish". Serbov N.G.

It is developed a stochastic model to description of dynamics of the spatial-temporal plankton structures and fish streams, which are eaten by plankton, within a new approach to modelling water-bioresources systems combining the multi-factor systems approach, stochastic differential equations and multi-fractal formalism.

Kew words: multifactor systems approach, stochastic equations, plankton structures, dynamics of system "plankton-fish".