УДК 539.184

Л.А. Вітавецька, *к.ф.-м.н.,* **Ю.Г. Чернякова,** *к.ф.-м.н.,* **Г.В. Ігнатенко,** *ст. викл.,*
О.В.Міщенко, *ас.,* **Н.В. Мудра,** *ас.*, **Е.М. Сєрга**, *к.г.н.*
Одеський державний екологічний університет

УЗАГАЛЬНЕНА КОНСЕРВАТИВНА РІЗНИЦЕВА СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧІ ПОШИРЕННЯ ЛАЗЕРНОГО ІМПУЛЬСУ У НЕЛІНІЙНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Викладена узагальнена консервативна різницева схема для задачі поширення лазерного імпульсу у нелінійному середовищі.
Ключові слова: *консервативна різницева схема,нелінійне рівняння Шредінгеру*

Вступ. Аналіз поширення фемтосекундного лазерного імпульсу за певних умов заснований на так називаному узагальненому рівнянні Шредінгеру [1-6], що відрізняється від традиційного нелінійного рівняння Шредінгеру наявністю похідної за часом від нелінійного відгуку середовища. Незважаючи на широке застосування чисельних методів [7,8] (див. [9-12]) і комп'ютерного моделювання взаємодії таких імпульсів із середовищем, дотепер для даного класу задач практично не мало місця яке-небудь обґрунтування застосовуваних різницевих схем. Ця обставина обумовлена тим, що, по-перше, були відсутні інваріанти взаємодії фемтосекундного лазерного імпульсу з речовиною, що, мабуть, не дозволяло будувати консервативні різницеві схеми і одержувати гарантовано достовірні результати комп'ютерного моделювання. По-друге, різноманітні застосування потребовують в використання тих чи інших форм рівняння Шредінгеру, тому у кожному випадку потрібно будувати свою схему. В нашій роботі ми викладемо узагальнену консервативну різницеву схему для задачі поширення фемтосекундного лазерного імпульсу в оптичному волокні з урахуванням тимчасової похідної від нелінійного відгуку середовища, яка є подальшим розвитком відповідних схем, розвинутих у [2,3,11,12].

Основні рівняння. Процес поширення фемтосекундного імпульсу в середовищі з нелінійністю з урахуванням тимчасової похідної від нелінійного відгуку середовища (дисперсією нелінійності) при відсутності впливу дифракції оптичного випромінювання і з урахуванням дисперсії другого порядку описується безрозмірним комбінованим (узагальненим) нелінійним рівнянням Шредінгеру [2,4]:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + iD\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\alpha[|A|^2 + f(|A|)]A + \alpha\gamma\frac{\partial}{\partial t}\left(|A|^2 A\right) = 0, \qquad (1)$$

$$z > 0,\ 0 < t < L_1$$

с початковими і граничними умовами

$$A|_{z=0} = A_0(\mathrm{t}), \quad A|_{t=0,\,L1} = 0, \ \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{t=0,L_1} = 0. \qquad (2)$$

Тут $A(z, i)$ – нормована на максимальне значення на вході в нелінійне середовище комплексна амплітуда імпульсу, що поширюється уздовж координати z, що виміряється в одиницях довжини середовища, t – нормоване на тривалість імпульсу час у супровідній його системі координат, D – коефіцієнт, дорівнює відношенню довжини середовища до дисперсійної довжини, α – відношення початкової потужності імпульсу до характерної потужності самовпливу, γ – параметр, назад пропорційний добуткові тривалості імпульсу на його частоту, L_1 – безрозмірний часовий інтервал, у межах якого аналізується процес поширення імпульсу. Відзначимо, що в процесі взаємодії лазерного імпульсу з речовиною зберігається його енергія [2,3]

$$I_A(z) = \int_0^{L_1} |A|^2 dt = const. \tag{3}$$

Далі зручно ввести нову функцію *E(z, t)* (див. [2])

$$E(z,t) = \int_0^1 A(z,\eta) e^{\left[i(\eta - t)\right]^{\prime}\gamma} d\eta, \tag{4}$$

яка задовольняє релаксаційному рівнянню

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{i}{\gamma} E = A. \tag{5}$$

У нових змінних рівняння (1) перетвориться до виду

$$\frac{\partial E}{\partial z} + iD \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \alpha\gamma |A|^2 A = 0. \tag{6}$$

Крайові умови мають вигляд:

$$E\Big|_{t=0} = \frac{\partial E}{\partial t}\Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{i}{\gamma} E \right)\Big|_{t=L_1} = 0, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial z} - \frac{iD}{\gamma^2} E \right)\Big|_{t=L_1} = 0. \tag{8}$$

На вході у середовище замість початкового розподілу функції *A(z,t)* задається умова

$$E(0,\ t) = E_0(t) = \int_0^t A_0(\eta) e^{[i(\eta t)]/\gamma} d\eta. \tag{9}$$

У результаті процес поширення фемтосекундного імпульсу описується рівняннями (5), (6) з початковою і граничною умовами (7)-(9). Рівняння (6) зручніше для чисельного моделювання і має наступні інваріанти [2,3]:

$$I_1(z) = \int_{0t}^{L_1} \left(i|E|^2 - \gamma \left(E \frac{\partial E^*}{\partial t} \right) \right) dt = const, \tag{10}$$

$$I_2(z) = \int_0^{L_1} EA^* \, dt = const, \tag{11}$$

а також спектральним інваріант

$$I_{SP}(z) = I_{SP}(z) = I_{SP}(0) \exp(iDz/\gamma^2) \tag{12}$$

або у термінах функції *E(z, t)*

$$E(z, L_1) = e^{iDz/\gamma^2} E_0(L_1). \tag{13}$$

Наведені інваріанти використовуються для побудови консервативних різницевих схем.

Побудова двошарових різницевих схем для перетвореного рівняння. Побудуємо різницеву схему для задачі (5) - (9). Для цього введемо в області $\Omega = (0, L_z) \times (0, L_1)$ сітку $\omega = \omega_z \times \omega_t$:

$$\omega_z = \{z_m = mh,\ m = 0, 1, ..., N_z,\ h = L_z\ / N_z\},$$

$$\omega_t = \{t_n = n\tau,\ n = 0, 1, ..., N_z,\ \tau = L_t / N_t\}. \qquad (14)$$

Визначимо сіткові функції A и E на ω і введемо також наступні позначення:

$$A = A(z_m, t_n),\ \hat{A} = A(z_{m+1}, t_n),\ A_{\pm 1} = A(z_m, t_{n\pm 1}) \qquad (15)$$

$$\overset{0,5}{A} = 0,5(\hat{A} + A),$$

$$E=E(z_m, t_n),\ \hat{E} = E(z_{m+1}, t_n),\ E_{\pm 1} = E(z_m, t_{n\pm 1}),$$

$$\overset{0,5}{E} = 0,5(\hat{E} + E),$$

$$\left|\overset{0,5}{A}\right|^2 = 0,5\left(\left|\hat{A}\right|^2 + \left|A\right|^2\right);$$

$$\Lambda_{\bar{t}t} u = (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) / \tau^2,\ n = 1, 2, ..., N_t - 5. \qquad (16)$$

Різницеву схему для рівнянь (5)–(9) з урахуванням позначень (16) запишемо як:

$$\frac{\hat{E} - E}{h} + iD\Lambda_{\bar{t}t}\overset{0,5}{E} + \alpha\gamma\left|\overset{0,5}{A}\right|^2\overset{0,5}{A} = 0 \qquad (17)$$

$$\frac{\hat{E}_{+1} - \hat{E}_{-1}}{2\tau} + \frac{i}{\gamma}\hat{E} = \hat{A},$$

$$n = 1, 2, ..., N_t - 1.$$

Рівняння (17) необхідно доповнити різницевими співвідношеннями у відповідних граничних точках:

$$E_0 = E_1 = A_0 = A_1 = 0, \qquad (18)$$

$$\frac{\overset{0,5}{E}_{N_1} - \overset{0,5}{N}_{N_1-1}}{h} + \frac{i}{\gamma}\overset{0,5}{E}_{N_1} - \tau\frac{\overset{0,5}{E}_{N_1}}{\gamma^2} = 0,$$

$$\frac{\hat{E}_{N_1} - E_{N_1}}{h} = \frac{sD}{\gamma^2}\overset{0,5}{E}_{N_1}.$$

У граничній точці $n = N_t$ маємо наступне різницеве рівняння

$$\frac{\hat{E}_{N_1} - E_{N_1}}{h} - \frac{iD}{\tau}\left(\frac{\overset{0,5}{E}_{N_1} - \overset{0,5}{E}_{N_1-1}}{\tau} + \frac{i}{\gamma}\overset{0,5}{E}_{N_1}\right) = 0. \qquad (19)$$

Початкова умова для сіткової функції E задається у виді: $E(0, t_n) = E_0(t_n)$, $n = 0, 1, \dots N_1$. Можна показати, що різницева схема (17)-(19) має перший порядок апроксимації по тимчасовій координаті і другий по просторовій координаті: $\Psi = 0(\tau + h^2)$. Дійсно, різницеві рівняння апроксимують вихідні граничні умови (7) і (9) у крапці $(z_m+0,5h,\ L_1)$ з першим порядком по t і другим по z. В інших вузлах $(z_m+0,5h,\ t_n)$ відповідні рівняння апроксимують диференціальну задачу з другим порядком за часом і по просторі.

Оскільки різницева схема (17)-(19) є нелінійною, то для її рішення зручно використати метод простої ітерації:

$$\frac{\overset{(s+1)}{\hat{E}} - E}{h} + iD\Lambda_{\bar{t}t} + \overset{(s+1)}{\underset{}{\overset{0.5}{E}}} + \alpha\gamma\left|\overset{(s)}{\overset{0.5}{A}}\right|^2\overset{(s)}{\overset{0.5}{A}} = 0, \qquad (20)$$

$$\frac{\overset{(s)}{\overset{0.5}{E}}_{+1}-\overset{(s)}{\overset{0.5}{E}}_{-1}}{2\tau}+\frac{i}{2\gamma}\left(\overset{(s)}{\overset{0.5}{E}}_{+1}+\overset{(s)}{\overset{0.5}{E}}_{-1}\right)=\overset{(s)}{\overset{0.5}{A}},$$

$$\frac{\overset{(s+1)}{\hat{E}_{N_1}}-E_{N_1}}{h}-\frac{iD}{\tau}\left(\frac{\overset{(s+1)}{\overset{0.5}{E}}_{N_1}-\overset{(s+1)}{\overset{0.5}{E}}_{N_1-1}}{\tau}+\frac{i}{\gamma}\overset{(s+1)}{\overset{0.5}{E}}_{N_1}\right)=0,\qquad s=0,1,2,... \tag{21}$$

Значення функцій на нульовій ітерації (s=0) беруться з попереднього шару по z. Ітерації припиняються при виконанні умови

$$\max_n\left|\overset{(s+1)}{\hat{E}_n}-\overset{(s)}{\hat{E}_n}\right|\le\varepsilon\max_n\left|\overset{(s)}{\hat{E}_n}\right|+\delta,\ \varepsilon,\ \delta=const>0. \tag{22}$$

Для рішення 3-точкових рівнянь далі використовується звичайний метод прогону.

Різницеві схеми для вихідного рівняння. Введемо в області $\Omega = (0, L_z) \times (0, L_1)$ сітку (15). Визначимо сіткову функцію A на ω. Уведемо також наступні позначення:

$$\hat{A}=A(z_{m+1},t_n),$$
$$A=A(z_m,t_n),$$
$$\overset{0.5}{A}=0.5\left(\hat{A}+A\right), \tag{23}$$
$$\left|\overset{0.5}{A}\right|^2=0.5\left(\left|\hat{A}\right|^2+|A|^2\right),$$
$$A_{\pm1}=A(z_m,t_{n\pm1}).$$

Для задачі (1), (2) побудуємо різницеву схему, використовуючи позначення (16), (23)

$$\begin{gathered}\left(\hat{A}+A\right)/h+iD\Lambda_{\bar{t}t}\overset{0.5}{A}+i\alpha\left|\overset{0.5}{A}\right|^2\overset{0.5}{A}+\\+\alpha\gamma\left(\left|\hat{A}_{+1}\right|^2\hat{A}_{+1}+|A_{+1}|^2A_{+1}-\left|\hat{A}_{-1}\right|^2\hat{A}_{-1}-|A_{-1}|^2A_{-1}\right)/4\tau=0\end{gathered} \tag{24}$$

с початковими і граничними умовами

$$A(0,t_n)=A_0(t_n),\ n=0,1,...,A(z_m,0)=A(z_m,N_1)=0,\ m=0,...,N_z.. \tag{25}$$

Для розв'язання вище наведеної схеми організується ітераційний (s=0,1,...) процес

$$\begin{gathered}\left(\overset{(s+1)}{\hat{A}}-A\right)/h+iD\Lambda_{\bar{t}t}\overset{(s-1)}{\overset{0.5}{A}}+i\alpha\left|\overset{(s)}{\overset{0.5}{A}}\right|^2\overset{(s)}{\overset{0.5}{A}}+\\+\alpha\gamma\left(\left|\overset{(s)}{\hat{A}}_{+1}\right|^2\overset{(s)}{\hat{A}}_{+1}+|A_{+1}|^2A_{+1}-\left|\overset{(s)}{\hat{A}}_{-1}\right|^2\overset{(s)}{\hat{A}}_{-1}-|A_{-1}|^2A_{-1}\right)/4\tau=0\end{gathered} \tag{26}$$

і значення функцій на верхньому шарі на нульовій ітерації беруться з попереднього шару по z. Ітераційний процес припиняється при виконанні умови (21). Для задачі (1), (2) можна записати і ще таку різницеву схему

$$\begin{gathered}\left(\hat{A}+A\right)/h+iD\Lambda_{\bar{t}t}\overset{0.5}{A}+i\alpha\left|\overset{0.5}{A}\right|^2\overset{0.5}{A}+\\+\alpha\gamma\left[\left(\left|\hat{A}_{+1}\right|^2+|A_{+1}|^2\right)\left(\hat{A}_{+1}+A_{+1}\right)-\left(\left|\hat{A}_{-1}\right|^2+\left|\hat{A}_{-1}\right|^2\right)\left(\hat{A}_{-1}+A_{-1}\right)\right]/(8\tau)=0\end{gathered} \tag{27}$$

с початковими і граничними умовами (25). Ітераційний процес тоді має вигляд

$$\left(\overset{(s+1)}{\hat{A}} - A\right)/h + iD\Lambda_{\bar{t}t}\overset{(s-1)}{\underset{0.5}{A}} + i\alpha\left|\overset{(s)}{\underset{0.5}{A}}\right|^2 \overset{(s)}{\underset{0.5}{A}} + +\alpha\gamma\left[\left(\left|\overset{(s)}{\hat{A}}_{+1}\right|^2 + \left|A_{+1}\right|^2\right)\left(\overset{(s)}{\hat{A}}_{+1} + A_{+1}\right)\right] -$$
$$-\left[\left(\left|\overset{(s)}{\hat{A}}_{-1}\right|^2 + \left|A_{-1}\right|^2\right)\left(\overset{(s)}{\hat{A}}_{-1} + A_{-1}\right)\right]/(8\tau) = 0, \quad , s = 0,1,2.... \tag{28}$$

Значення функцій на верхньому шарі на нульовій ітерації також беруться з попереднього шару по z. Ітераційний процес припиняється, якщо виконано умову (22).

У заключення автори висловлюють глибоку подяку проф. Глушкову А.В. за корисні зауваження та поради.

Список літератури

1. *Орлов Н.Ю.* Вариационный подход к определению энергетического спектра связанных электронов// Дифференц. уравнения.-1991.-т.27,№7.-с.1237-1248.
2. *Трофимов В.А.* Нелинейное волновое уравнение лазерной оптики фемтосекундных импульсов//Дифференц. уравнения.-1998.-Т.34,№7.-С. 1002-1004.
3. *Варенцова С.А., Волков А.Г., Трофимов В.А.* Консервативная разностная схема для задачи распространения фемтосекундного лазерного импульса в кубично-нелинейной среде// Журнал вычисл. матем. и матем.физики.-2003.-Т.43,№11.-С. 1709-1721.
4. *Глушков А.В*. Атом в электромагнитном поле.- Киев: КНТ, 2006.
5. *Glushkov A.V*. Energy approach to resonance states of compound super-heavy nucleus and EPPP in nucleus collisions// Low Energy Antiproton Phys.-2005.-Vol.796.-P.206-210
6. *Glushkov A.V., Loboda A.V.,Khokhlov V.N., Prepelitsa G.P.* Numerical modeling a populations differences dynamics of resonant levels of atoms in a non-rectangular form laser pulse: Optical bi-stability effect// IEEE-LEOS Journal.-2006.-p.111-114.
7. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. - М.: Наука, 1977.
8. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1980.
9. *Глушков О.В., Шпінарева І.М., Амбросов СВ.* Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ.-Одесса: ТЕС, 2004.
10. *Глушков А.В.*, *Кругляк Ю.О., Чернякова Ю.Г.* Лінійна алгебра.- Одесса: ТЕС, 2004.
11. *Глушков О.В., Лобода А.В., Хецеліус О.Ю., Свинаренко А.А.* Обчислювальні методи динаміки суцільних середовищ. Спеціальні розділи. -Одесса: Екологія, 2007.
12. *Глушков А.В*. Метод конечных разностей решения задач теплопроводности. Метод. указания к изучению раздела «Методы математ. физики» по курсу «Высшая математика» для студ. спец. Метеорология.-Одесса: ОГМИ-1991.-16С.

Обобщенная консервативная разностная схема для задачи распространения лазерного импульса в нелинейной среде.

Витавецкая Л.А., Чернякова Ю.Г., Игнатенко А.В., Мищенко Е.В., Мудрая Н.В., Серга Э.Н.

Изложена обобщенная консервативная разностная схема для задачи распространения лазерного импульса в нелинейной среде.

Ключевые слова: *консервативная разностная схема, нелинейное уравнение Шредингера*

Generalized conservative differences scheme for task of propagating laser pulse in a non-linear medium.

Vitavetskaya L.A., Chernyakova Yu.G., Ignatenko A.V., Mischenko E.V., Mudraya N.V., Serga E.N.

It is proposed a generalized conservative differences scheme for task of propagating a laser pulse in a non-linear medium.

Keywords: *conservative differences scheme, non-linear Schrödinger equation*