

**А.В. Глушков, д.ф.-м.н., Н.Г. Сербов, к.г.н., А.К. Балан, ст. преп., Т.В. Лукаш, асп.**  
*Одесский государственный экологический университет*

## **МНОГОФАКТОРНЫЙ СИСТЕМНЫЙ И МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЙ ПОДХОДЫ В МОДЕЛИРОВАНИИ ГОДОВОГО СТОКА (р. ДУНАЙ)**

*На основе нового метода описания гидрологических систем, базирующегося на многофакторном системном подходе и мультифрактальном формализме, проведено численное моделирование (на примере р.Дунай) флуктуационных временных трендов изменения годового стока и выявлен феномен генезиса фрактальных размерностей.*

**Ключевые слова:** *метод многофакторного системного моделирования, мультифрактал, годовой сток*

**Введение.** В настоящее время по-прежнему крайне актуальной является разработка высоко эффективных, адекватно отражающих физику гидрологического цикла математических моделей, обладающих достаточно высокой степенью корректности и прогнозируемости [1-18]. К числу традиционных подходов к моделированию характеристик речного стока следует, естественно, отнести так называемые динамические модели расчета и прогноза, базирующиеся на использовании гидродинамических уравнений типа Навье-Стокса или более простого варианта гидродинамических уравнений типа Сен-Венана [1]. Хотя динамические модели обладают рядом весьма важных, хорошо известных достоинств, их корректная реализация по-прежнему далека от удовлетворительного уровня. В последние годы развитие получил ряд более простых в вычислительном отношении моделей типа «black-box» моделей [7-14], а также относительно новый класс моделей, основанных на использовании аппарата функций отклика [5-7]. Как частный случай искомого подхода, могут рассматриваться системные модели с «множеством входов» и «одним выходом». В числе таких моделей следует упомянуть так называемые модели типа Arime-Nonline [10,11], а также модели типа OSEU-Hydro-MSFR [12-17], базирующиеся на многофакторном системном и мультифрактальном формализмах. В отличие от классических или полуэмпирических моделей описания характеристик речного стока в указанных моделях более адекватно отражена физика гидрологического цикла. Между тем, для них также важной проблемой остается адекватная калибровка и более детальное изучение внутренних симметрий.

В целом, несмотря на наличие огромного числа различных моделей, в том числе, для моделирования годового стока рек, дальнейшее развитие многофакторного системного и мультифрактального метода остается, на наш взгляд, крайне актуальной гидрологической задачей. Ранее модель OSEU-Hydro-MSFR с успехом применена для решения задач описания гидрологических характеристик, в частности, при описании экстремальных гидрологических явлений [12,16,17]. Тестовые расчеты и сравнение теоретических данных с данными наблюдений по расходам, соответствующим экстремальным паводкам на примере р. Дунай, продемонстрировали достаточную эффективность модели OSEU-Hydro-MSFR и удовлетворительное согласие теории с данными наблюдений [11]. В данной работе на основе модели OSEU-Hydro-MSFR [12-17] проведено численное моделирование (на примере р.Дунай) флуктуационных временных трендов изменения годового стока и также выявлен феномен генезиса фрактальных размерностей. Важным является дальнейшее усовершенствование подхода, связанное с использованием алгоритма Grassberger-Procaccia [3].

**Метод расчета.** Поскольку искомым подход детально излагался в целом ряде публикаций, здесь мы ограничимся лишь изложением ключевых аспектов метода моделирования. Согласно, [12,14] характеристическая функция выхода нелинейной системы определяется суммой нелинейной компоненты, определяемой мгновенным и запаздывающим откликом системы, и линейной компоненты, связанной с линейным откликом системы. Мастерное уравнение для функции выхода

$$Q_t = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n(j)} \sum_{k=i}^{n(j)} U_{i,k}^{(j)} P_{t-i+1}^{(j)} P_{t-k+1}^{(j)} + \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{k(j)} U_{i+n}^{(j)} P_{t-(i+n)+1}^{(j)}, \quad (1)$$

где  $j=1,2,\dots,J$  – число независимых входов (в т.ч., обусловленных дождевыми осадками),  $J$  – число мини водосборов (в сумме дающих полный водосбор),  $n$  – число временных интервалов, которые соответствуют дождевым осадкам, дающим вклад в мгновенную и запаздывающую составляющие стока (нелинейная часть общей «памяти» водосбора),  $l$  – число аналогичных временных интервалов (линейная часть общей «памяти»),  $(n+l)$  – длина полной «памяти» модели,  $P$  – матрица осадков  $j$  входной серии, соответствующей  $j$ -ой мини-водосборной площади;  $U_{i,k}$  – обозначает дискретные серии ординат нелинейной части функции отклика, которые суммируются далее, скажем, в коэффициент стока,  $U_i$  – то же для линейной части.

Модель калибруется по числу серий отдельных данных по дождевым осадкам и соответствующему стоку. Уравнение (1) с учетом  $p$  ( $p=1, NN$ ) числа серии данных записывается в следующем виде

$$Q_t^p = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n(j)} \sum_{k=1}^{n(j)} U_{i,k}^{(j)} P_{t-i+1}^{(j),p} P_{t-k+1}^{(j),p} + \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{l(j)} U_{i+n}^{(j)} P_{t-(i+n)+1}^{(j),p}. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) для калибровочной серии  $N$  значений расходов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  естественно представимо в вектор-матричной форме

$$Q = P^{(1)}U^{(1)} + P^{(2)}U^{(2)} + \dots + P^{(j)}U^{(j)}. \quad (3)$$

Уравнение (1) может быть также записано в виде

$$Q = PU, \quad (4)$$

где  $P$  – матрица размером  $(N, M)$ ,

$$P = [P^{(1)}P^{(2)}, \dots, P^{(j)}] \quad (5)$$

и  $M = \sum_{j=1}^J mn(j)$ . В результате  $\{P^T P\}$  является квадратной  $(M \times M)$  симметричной

матрицей и  $U$  –  $(M \times 1)$  вектор (столбец). Далее решение уравнения (3) осуществляется стандартными численными методами [12-18].

Для выявления фрактальных особенностей во временных рядах флуктуаций речного стока ранее обычно используется классическая версия мультифрактального формализма. Фундаментальной характеристикой является мультифрактальный спектр. Для однородных фракталов скейлинг описывается одной фрактальной размерностью. Неоднородные или мультифрактальные объекты обычно характеризуются спектром  $D(q)$  фрактальных размерностей (фрактальная размерность равна  $D(0)$ , а функция  $D(q)$  обычно трактуется как мультифрактальный спектр). С математической точки зрения, ключевая задача мультифрактального формализма (вычисления мультифрактального спектра) сводится к нахождению сингулярного спектра  $f(\alpha)$  меры  $\mu$ .

Он ассоциирует хаусдорфову размерность с сингулярным показателем  $\alpha$ , что позволяет вычислить степень сингулярности  $N_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^{-f(\alpha)}$ , где  $N_\alpha(\varepsilon)$  есть число гиперкубов, необходимых для того, чтобы охватить меру и  $\varepsilon$ -размер каждого гиперкуба. Функция распределения  $Z$  извлекается из этого спектра

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)} \text{ for } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6)$$

Здесь  $\tau(q)$  есть спектр, который может быть получен путем преобразованием Лежандра сингулярного спектра  $f(\alpha)$ . Соответственно, из спектра  $\tau(q)$  может быть получен спектр обобщенных фрактальных размерностей

$$D_q = \frac{\tau(q)}{(q-1)}. \quad (7)$$

Более детально численные аспекты определения спектра на основе классического фрактального формализма изложены, например, в [3,12]. Более эффективным, прежде всего, в вычислительном отношении оказывается метод Grassberger-Procaccia [2], называемый также методом корреляционной размерности. В последние годы этот подход с успехом был имплементирован нами в многофакторный системный и мультифрактальный формализм при решении целого ряда задач гидрометеорологии, климатологии и гидроэкологии [12,19-22]. Корреляционный интеграл функции  $C(r)$  для выявления различий между хаотическими и стохастическими системами, в рамках алгоритма Grassberger-Procaccia [3] определяется следующим образом

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N(k-1)} \sum_{\substack{i,j \\ (1 \leq i < j \leq N)}} H(r - \|y_i - y_j\|), \quad (8)$$

где  $H$  – ступенчатая функция Хевисайда,  $H(u) = 1$  для  $u > 0$  и  $H(u) = 0$  для  $u \leq 0$ ;  $r$  – радиус сферы с центром в  $y_i$  или  $y_j$ ;  $N$  – длина временного ряда. Если временной ряд характеризуется аттрактором, то корреляционный интеграл  $C(r)$  соотносится с радиусом  $r$  посредством

$$d_2 = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{\log C(r)}{\log r}, \quad (9)$$

где  $d_2$  – корреляционная размерность, которую можно определить как наклон линии в координатах  $\log C(r)$  и  $\log r$  посредством среднеквадратического подбора прямой линии в некотором диапазоне  $r$ , называемом диапазоном масштабирования. Фактически, искомый алгоритм позволяет непосредственно получить данные о фрактальных свойствах системы, а также крайне важную информацию о поведении динамических переменных системы.

**Результаты расчета и выводы.** Мы выполнили численное моделирование на основе модели OSEU-Hydro-MSFR флуктуационных временных трендов изменения годового стока р. Дунай в период с 1901г. по 2011г. (рассматривался участок р. Дунай от станции Devin (Bratislava) до станции Achleiten; см. рис.1). Детальное описание искомого участка дано в работе [11]. С целью сравнения прогностических возможностей моделей OSEU-Hydro-MSFR и Arime-Nonline [11], калибровка первой Тестовые расчеты продемонстрировали достаточно хорошее согласие выходных обеих моделей. На рис.1 представлены расчетные данные (сплошные кривые) по годовому стоку (в м<sup>3</sup>/с), соответствующие станциям: 1 - Bratislava (QBL), 2- Kienstock (KNS), 3- Achleiten (ACL), 4 – Nagymaros (NMR).



Рис. 1 - Схема участка р. Дунай от станции Devin (Bratislava) до станции Achleiten.

Анализ показывает, что модель OSEU-Hydro-MSFR предсказывает временные флуктуации годового стока в очень близком согласии (отличие не превышает 2-4 %) с данными модели Arime-Nonline [11]. При этом, в отличие от последней, она является строго *ab initio* моделью. Сравнение полученных расчетных данных с наблюдаемыми [11] показывает, модель OSEU-Hydro-MSFR обеспечивает достаточно хорошее согласие искомым данным и позволяет отследить количественно приемлемо изменения годового стока на достаточно длительном временном интервале. Естественно, модель допускает дальнейшее улучшение за счет более адекватного учета нелинейности системы, прямого включения в схему функций отклика и т.д. [12,13]. Далее была выполнена оценка спектра фрактальных размерностей для рядов годового стока на участке р. Дунай от станции Devin (Bratislava) до станции Achleiten. Расчет показал, что соответствующие фрактальные размерности лежат в интервале [1.4-1.9]. Зная соответствующий мультифрактальный спектр, далее решается задача восстановления и прогноза стока [6,8,15]. Подробно наша версия OSEU-Chaos-FRC метода прогноза характеристик стохастических систем изложена в работах [19-22] и базируется на формализме Grassberger-Procaccia [3] и нелинейном алгоритме прогноза [12,13]. Проведенная нами оценка изменений годового стока (на период до 2011г включительно) также приведена на рис.2 (кривая с кружочками). Отметим, что наш прогноз находится также в отличном согласии с аналогичными данными, полученными в рамках модели Arime-Nonline [11] (вплоть до 2008г.). В заключение следует обратить внимание на численную близость полученных нами значений фрактальных размерностей в случае флуктуаций годового стока речных систем с аналогичными значениями характерными для динамических характеристик родственных гидрометеорологических и экологических систем [19-22], для которых также свойственно хаотическое поведение характеристических динамических переменных. Искомый эффект является проявлением более фундаментального феномена генезиса фрактальных размерностей в родственных (диссипативных, фрустрированных) динамических системах (см. комментарии в работах [12-14,19-22]). Недавно подобный феномен был открыт и в такой достаточно сложной и экзотической системе как система “космическая плазма – галактические космические лучи- турбулентные пульсации в планетарной атмосферной системе” [23].

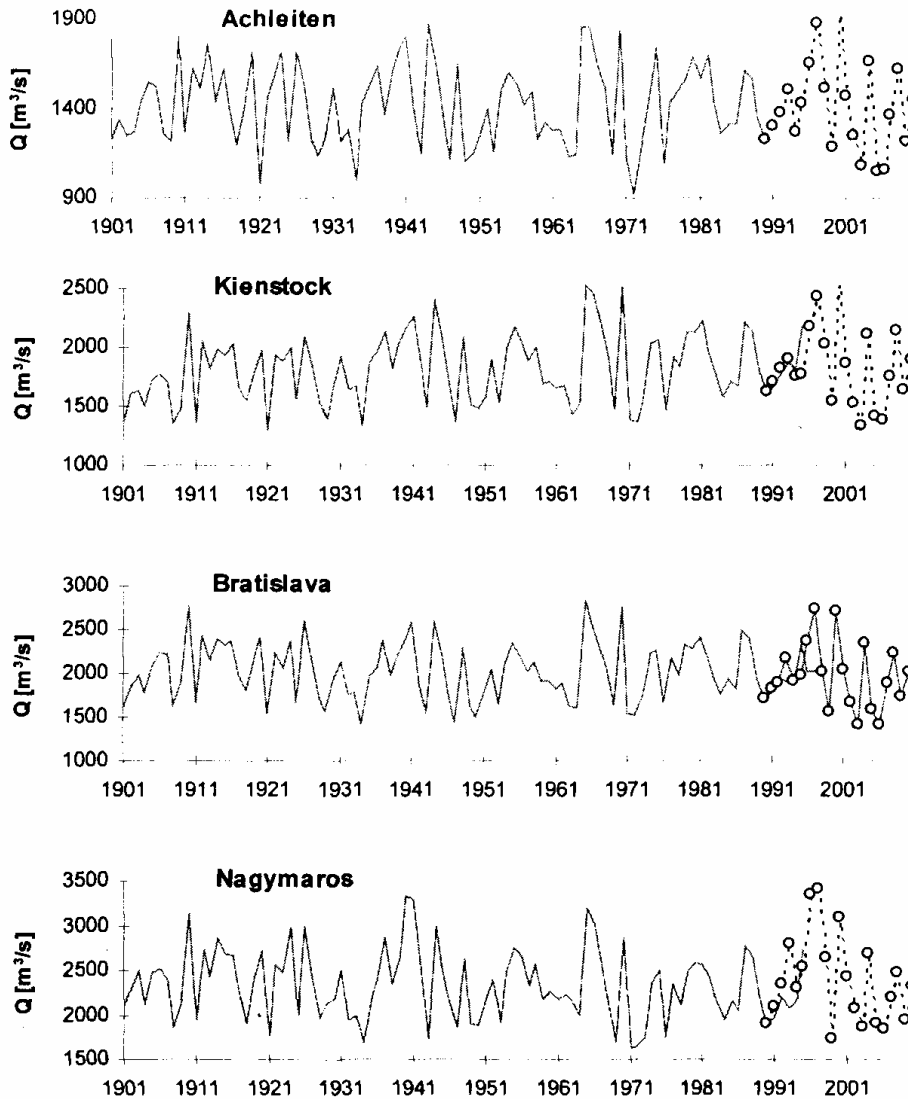


Рис. 2 - Серии значений годового стока для 4 станций в р-не Братиславы (для р. Дунай) и прогнозные значения (кривые с кружками).

### Список литературы

1. Кучмент Л.С, Демидов В.Н, Мотовилов Ю.Г. Формирование речного стока.-М.: Наука,1993.
2. Islam M.N., Sivakumar B. Characterization and prediction of runoff dynamics: a nonlinear dynamical view// Adv.Water Res.-2002.-V.25, № 2- P.179-190.
3. Grassberger P, Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D.-1983.-Vol.9,№1-2.-P.189-208.
4. Лобода Н.С. Формализм функций памяти и мультифрактальный подход в задачах моделирования годового стока рек и его изменений под влиянием факторов антропогенной деятельности// Метеорология, климатология и гидрология.-2002.-№45.-С.140-146.
5. Гонченко Е.Д., Романчук М.Е. Математическая модель для расчета характеристик экстремально высоких паводков и половодий на территории Придунайских озер// Метеорология, климатология и гидрология.-2001.-№42.-С.39-50.
6. Найтал С., Иваненко А.Г. Стохастическая модель гидрографа рек Суринама // Метеорология, климатология и гидрология.-1993.-№29.-С.32-47.
7. Maftuoglu R.F. New models for non-linear catchment's analysis// Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands).-1984.-Vol.73.-P.335-357.
8. Maftuoglu R.F. Monthly runoff generation by non-linear models// Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands).-1991.-Vol.125.-P.277-291.

9. *Kothyari U.C., Arvanmuthan V., Singh V.P.* Monthly runoff generation using the linear perturbation model// J.Hydrol.-1993.-Vol.144.-P.371-379.
10. *Stewart M.D., Bates P.D., Anderson M.G., Price D.A., Burt T.P.* Modelling floods in hydrologically complex lowland river reaches// Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands).-1999.-Vol.223.-P.85-106.
11. *Svoboda A., Pekarova P., Miklanek P.* Flood hydrology of Danube between Devin and Nagymaros in Slovakia.- Nat. Rep.2000 of the UNESCO.-Project 4.1.-Intern.Water Systems.-2000.-96P.
12. *Glushkov A.V., Loboda N.S., Khokhlov V.N.* Neural Networks and Multi-Fractal Modelling the Frustrated Aquifer Systems. "Underground" Hydrology and Global Earth Angular Momentum Disbalance Resources // Water resources in Asia Pasific Region (Japan) .-2003.-P.1355-1358.
13. *Loboda N.S., Glushkov A.V., Khokhlov V.N.* Using meteorological data for reconstruction of the annual runoff series over an ungauged area: Empirical orthogonal functions approach to Moldova-Southwest Ukraine region//Atmospheric Research (Elsevier; The Netherlands). -2005.-Vol.77.-P.100-113.
14. *Глушков А.В., Балан А.К.* Многофакторный мультифрактальный подход в задачах моделирования стока и краткосрочном гидрологическом прогнозе (на примере р. Дунай) // Метеорология, климатология, гидрология.-2004.-№48.-С.392-396.
15. *Глушков А.В., Балан А.К.* Застосування апарату вейвлет-перетворень та мульти-фрактального підходу до вивчення стохастичних флуктуацій річкового стоку (на пр.р.Дунай) // Метеорология, климатология, гидрология.-2005.-№49.-С.505-510.
16. *Глушков А.В., Балан А.К., Баланюк Е.П.* Метод многофакторного системного и мультифрактального моделирования в задачах расчета экстремальных гидрологического явлений//Ecology of Siberia, the Far East and the Arctic.-2003.-V.2.-P.113-118.
17. *Сербов Н.Г., Балан А.К., Соляникова Е.П.* Многофакторный системный и мульти-фрактальный подходы в моделировании экстремально высоких паводков (на примере р. Дунай) и временных флуктуаций концентраций загрязняющих веществ в речной воде// Вестник ОГЭКУ.-2008.-N6.-С.7-13.
18. *Glushkov A.V., Loboda N.S., Khokhlov V.N., Lovett L.* Using non-decimated wavelet decomposition to analyse time variations of North Atlantic Oscillation, eddy kinetic energy, and Ukrainian precipitation // Journal of Hydrology (Elsevier; The Netherlands). – 2006. – Vol. 322. – No. 1-4. – P. 14-24.
19. *Глушков А.В., Хохлов В.Н., Сербов Н.Г., Балан А.К., Буякова Ю.Я., Баланюк Е.П.* Низкоразмерный хаос во временных рядах концентраций загрязняющих веществ в атмосфере и гидросфере// Вестник ОГЭКУ.-2007.-N4.-С.337-348.
20. *Глушков А.В., Лобода Н.С., Хохлов В.Н., Сербов Н.Г., Свиначенко А.А., Буякова Ю.Г.* Хаос во временных рядах концентраций загрязняющих веществ в атмосфере: краткосрочный прогноз// Вестник ОГЭКУ.-2008.-N5.-С.225-235.
21. *Glushkov A.V., Khokhlov V.N., Loboda N.S., Serbov N.G., Zhurbenko K.* Signatures of low-dimensional chaos in hourly water level measurements at coastal site of Mariupol, Ukraine// Stoch. Environment Res. Risk Assess. (Springer).-2008.-Vol.22,N6.-P.777-788.
22. *Khokhlov V.N., Glushkov A.V., Loboda N.S., Bunyakova Yu.Y.* Short-range forecast of atmospheric pollutants using non-linear prediction method//Atmospheric Environment (Elsevier; The Netherlands).-2008.-Vol.42.-P.7284-7292.
23. *Glushkov A.V., Rusov V.D., Loboda N.S., Khokhlov V.N., Khetselius O.Yu., Svinarenko A.A., Prepelitsa G.P.* On possible genesis of fractal dimensions in the turbulent pulsations of cosmic plasma- galactic-origin rays – turbulent pulsation in planetary atmosphere system//Advances in Space Research (Elsevier; The Netherlands).-2008.-Vol.41-P.1713-1726.

**Багатофакторний системний та мультифрактальний підходи у моделюванні річного стоку (р. Дунай). Глушков О.В., Сербов М.Г., Балан А.К., Лукаш Т.В.**

*На підставі нового методу опису характеристик гідрологічних систем, який базується на багатофакторному системному підході і мультифрактальному формалізмі, проведено чисельне дослідження флуктуаційних часових трендів змінення річного стоку (на прикладі р. Дунай) й виявлено феномен генезису фрактальних розмірностей.*

**Ключові слова:** метод багатофакторного системного моделювання, мультифрактал, річний стік

**A multi-factor systems and multi-fractal approaches in modelling the annual runoff (the Danube river).**

**Glushkov A.V., Serbov N.G., Balan A.K., Lukash T.V.**

*It is carried out numerical modelling fluctuate temporal trends for annual runoff (r. Danube) within a new method of description for the hydrological systems. The latter is based on the combining multi-factor systems approach and multi-fractal formalism. It is discovered the phenomenon of genesis of the fractal dimensions.*

**Kew words:** multi-factor systems approach, multi-fractal, annual runoff