

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ ВЗВЕСИ В ВОДНОМ ПОТОКЕ

В статье предлагаются математическая модель установившейся турбулентной диффузии взвеси, удобная для выполнения расчетов на персональных компьютерах в табличном редакторе Excel. Модель разработана в плоской (по вертикали и горизонтали) и пространственной постановке задачи. Приводятся рекомендации для выполнения инженерных расчетов, а также формулы для проверки правильности этих расчетов.

**Ключевые слова:** математическая модель, установившаяся турбулентная диффузия, взвесь, водный поток.

**Введение.** Математическое моделирование распространения взвеси в водной среде является актуальной экологической задачей. Расчет максимальной концентрации взвешенного вещества в контрольном створе, оценка общего количества этого вещества, вынесенного за пределы упомянутого створа, определение площади заиления дна и расчет поля концентрации взвеси необходимы при оценке качества водной среды, при нормировании сбросов загрязнителей и при оценке различных видов ущерба.

Методики, позволяющие получить всю перечисленную выше информацию, не найдены. В рассмотренных методиках учитывается лишь средняя концентрация вещества в створе (например [1], [2]).

**Материалы и методы исследования.** В настоящей работе предложена математическая модель расчета распространения взвеси с гидравлической крупностью  $u$  в пространственной постановке задачи с системой координат, в которой ось  $OX$  направлена вдоль осредненного вектора скорости потока,  $OY$  – вертикально вниз,  $OZ$  – соответственно поперек потока.

Модель разработана в три этапа: вначале получено дифференциальное уравнение установившейся турбулентной диффузии взвеси в вертикальной плоскости и выведены расчетные формулы; далее была рассмотрена горизонтальная плоскость; и последний этап – пространственная задача.

Рассмотрим эти этапы.

1) В статье [3] приведено дифференциальное уравнение турбулентной диффузии взвеси в вертикальной плоскости

$$V_{CP}(\partial C/\partial x) = D(\partial^2 C/\partial y^2) - u(\partial C/\partial y), \quad (1)$$

где  $V_{CP}$  – средняя скорость потока;  
 $D$  – коэффициент турбулентной диффузии;  
 $C$  – концентрация вещества;  
 $u$  – гидравлическая крупность частиц.

Решение уравнения (1) методом конечных разностей имеет вид [3]:

$$C_{k+1,1} = (0,25 - f)C_{k,2} + (0,75 - f)C_{k,1}, \quad (2)$$

$$C_{k+1,n} = (0,25 - f) C_{k,n+1} + (0,25 + f) C_{k,n-1} + 0,5 C_{k,n}, \quad (3)$$

$$C_{k+1,N} = (0,25 + f) C_{k,N-1} + (0,75 - f) C_{k,N}, \quad (4)$$

где  $\Delta x = V_{CP}\Delta y^2/(4D); \quad (5)$

$$f = u \Delta x/(2V_{CP}\Delta y), \quad (6)$$

$f$  – безразмерный параметр, учитывающий обмен взвесью между слоями и ее

удаление из водной среды за счет оседания.

Индексом  $k$  обозначена нумерация створов, нанесенных в расчетной области потока с шагом  $\Delta x$ , а  $n$  – нумерация слоев толщиной  $\Delta y$ .

Из уравнений (2) – (4) видно, что сумма значений концентрации вещества в створе  $k+1$ , на  $2fC_{k,N}$  меньше, чем в створе  $k$ . Отсюда следует, что сумма значений концентрации вещества в каждом створе должна отвечать условию

$$\sum_{n=1}^N C_{k,n} = \sum_{n=1}^N C_{0,n} - 2f \sum_{i=0}^{k-1} C_{i,N}, \quad (7)$$

где  $N$  – количество слоев от поверхности до дна;  
 $C_{0,n}$  – концентрация вещества в начальном створе в  $n$ -ном слое;  
 $C_{i,N}$  – концентрация вещества в  $i$ -том створе в придонном слое.

Если фоновое значение концентрации вещества ( $C_E$ ) равно 0, то условие (7) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^N C_{k,n} = n_0 C_{CT} - 2f \sum_{i=0}^{k-1} C_{i,N}, \quad (8)$$

где  $n_0$  – количество слоев, занятых сточными водами в начальном створе;  
 $C_{CT}$  – концентрация вещества в сточных водах.

2) В горизонтальной плоскости дифференциальное уравнение (9) и его решение (10) – (12) записываются следующим образом:

$$V_{CP}(\partial C / \partial x) = D(\partial^2 C / \partial z^2) - uC / H_{CP}, \quad (9)$$

$$C_{k+1,1} = 0,25C_{k,2} + (0,75 - 2f)C_{k,1}, \quad (10)$$

$$C_{k+1,m} = 0,25(C_{k,m+1} + C_{k,m-1}) + (0,5 - 2f)C_{k,m}, \quad (11)$$

$$C_{k+1,M} = 0,25C_{k,M-1} + (0,75 - 2f)C_{k,M}, \quad (12)$$

где  $H_{CP}$  – средняя глубина потока в расчетной области;

$$\Delta x = V_{CP} \Delta z^2 / (4D);$$

$$f = u \Delta x / (2V_{CP}H).$$

Индексом  $m$  обозначена нумерация струй, ширина которых  $\Delta z$ .

Сумма коэффициентов в формулах (10) – (12) составляет  $(1-2f)$  поэтому при выполнении расчетов сумма значений концентрации вещества в каждом створе должна отвечать условию:

$$\text{при } C_E > 0 \quad - \quad \sum_{m=1}^M C_{k,m} = (1 - 2f)^k \sum_{m=1}^M C_{0,m}, \quad (13)$$

$$\text{при } C_E = 0 \quad - \quad \sum_{m=1}^M C_{k,m} = (1 - 2f)^k m_0 C_{CT}, \quad (14)$$

где  $M$  – количество струй по ширине потока;  
 $C_{0,m}$  – концентрация вещества в начальном створе в  $m$ -мой струе;  
 $m_0$  – количество струй, занятых сточными водами в начальном створе.

3) И, наконец, в пространственной постановке задачи дифференциальное уравнение (15) и его решение формулы (16)-(24) для различных участков живого сечения будут иметь следующий вид

$$V_{CP}(\partial C / \partial x) = D[(\partial^2 C / \partial y^2) + (\partial^2 C / \partial z^2)] - u(\partial C / \partial y); \quad (15)$$

$$C_{k+1,1,1} = (0,125 - f)C_{k,2,1} + 0,125 C_{k,1,2} + (0,750 - f)C_{k,1,1}, \quad (16)$$

$$C_{k+1,1,m} = (0,125 - f)C_{k,2,m} + 0,125(C_{k,1,m+1} + C_{k,1,m-1}) + (0,625 - f)C_{k,1,m}, \quad (17)$$

$$C_{k+1,1,M} = (0,125 - f)C_{k,2,M} + 0,125 C_{k,1,M-1} + (0,750 - f)C_{k,1,M}, \quad (18)$$

$$C_{k+1,n,1} = (0,125 - f) C_{k,n+1,m} + (0,125 + f) C_{k,n-1,m} + 0,125 C_{k,n,2} + 0,625 C_{k,n,1}, \quad (19)$$

$$C_{k+1,n,m} = (0,125 - f) C_{k,n+1,m} + (0,125 + f) C_{k,n-1,m} + 0,125(C_{k,n,m+1} + C_{k,n,m-1}) + 0,5 C_{k,n,m}, \quad (20)$$

$$C_{k+1,n,M} = (0,125 - f) C_{k,n+1,M} + (0,125 + f) C_{k,n-1,M} + 0,125 C_{k,n,M-1} + 0,625 C_{k,n,M}, \quad (21)$$

$$C_{k+1,N,1} = (0,125 + f) C_{k,N-1,1} + 0,125 C_{k,N,2} + (0,750 - f) C_{k,N,1}, \quad (22)$$

$$C_{k+1,N,m} = (0,125 + f) C_{k,N-1,m} + 0,125(C_{k,N,m+1} + C_{k,N,m-1}) + (0,625 - f) C_{k,N,m}, \quad (23)$$

$$C_{k+1,N,M} = (0,125 + f) C_{k,N-1,M} + 0,125 C_{k,N,M-1} + (0,750 - f) C_{k,N,M}, \quad (24)$$

где  $\Delta x = V_{CP}\Delta y^2/(8D)$ ;

$f = u \Delta x/(2V_{CP}\Delta y)$ ;

$\Delta y = \Delta z$ .

Формулы (16)-(18) записаны для (рис. 1) поверхностного слоя ( $n = 1$ ): (16) – левый берег ( $m = 1$ ); (17) – на удалении от берегов; (18) – правый берег ( $m = M$ ).

Формулы (19)-(21) записаны для слоев в толще потока и формулы (22)-(24) – для придонного слоя ( $n = N$ ).

<b>поверхность</b>						
<b>левый берег</b>	<b><math>n=1, m=1</math> (16)</b>	...	<b><math>n=1, m</math> (17)</b>	...	<b><math>n=1, m=M</math> (18)</b>	<b>правый берег</b>
	...	...	...	...	...	
	<b><math>n, m=1</math> (19)</b>	...	<b><math>n, m</math> (20)</b>	...	<b><math>n, m=M</math> (21)</b>	
	...	...	...	...	...	
	<b><math>n=N, m=1</math> (22)</b>	...	<b><math>n=N, m</math> (23)</b>	...	<b><math>n=N, m=M</math> (24)</b>	
<b>дно</b>						

Рис.1 – Схема живого сечения потока в створе  $k$ .

Условие проверки расчетов имеет вид:

$$\text{при } C_E > 0 \quad - \quad \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{k,n,m} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{0,n,m} - 2f \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{m=1}^M C_{i,N,m}, \quad (25)$$

$$\text{при } C_E = 0 \quad - \quad \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{k,n,m} = n_0 m_0 C_{CT} - 2f \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{m=1}^M C_{i,N,m}, \quad (26)$$

где  $C_{0,n,m}$  – концентрация вещества в начальном створе в  $n$ -ном слое в струе с номером  $m$ ;

$C_{i,N,m}$  – концентрация вещества в  $i$ -том створе в придонном слое в струе с номером  $m$ .

$n_0$  и  $m_0$  – количество слоев и струй, занятых сточными водами в начальном створе соответственно.

При оценке распространения взвеси в расчетной области потока задается сетка с шагом  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$  вдоль соответствующих осей. Шаги  $\Delta y$  и  $\Delta z$  равны, а  $\Delta x$  рассчитывается по формуле (5). Если рассматривается задача в плоской постановке, исчезает соответствующая переменная: вертикальная плоскость –  $Z$ ; горизонтальная плоскость –  $Y$ . Далее рассчитывается параметр  $f$  по формуле (6), значение параметра должно отвечать условию:  $f \leq 0,125$  для плоской задачи;  $f \leq 0,0625$  для пространственной задачи. Если значение параметра  $f$  не соответствует требованию, необходимо уменьшить размеры сетки и пересчитать параметр  $f$ . Задавшись распределением концентрации вещества в начальном створе, выполняется пошаговый расчет по формулам (2)-(4), (10)-(12) или (16)-(24) в зависимости от постановки задачи. Проверка правильности выполнения расчетов осуществляется по формулам (7), (13) или (25).

Расчет удобнее всего выполнять в табличном редакторе *Excel*.

**Результаты исследований и их анализ.** Наибольший интерес с научной точки зрения представляет решение, полученное для вертикальной плоскости. По сравнению с пространственной задачей оно более простое. В отличие же от горизонтальной плоскости здесь учитывается турбулентная диффузия взвеси по вертикали.

В табл. 1 и 2 приведен пример расчета диффузии взвеси ( $f=0,01$ ) в табличном редакторе *Excel*. В предпоследней строке таблиц стоит сумма концентраций вещества в створе, характеризующая общее количество вещества в этом створе. В последней строке стоит результат проверочного расчета по формуле (6).

Таблица 1 – Расчет диффузии взвеси при ее сбросе в поверхностный слой

n	Концентрация взвеси по створам в различных слоях ( $C_{k,n}$ )								
	k = 0	1	2	3	4	...	85	...	125
1	<b>100,0000</b>	74,0000	61,0000	52,8776	47,1940	...	15,6656	...	12,6902
2	0,0000	26,0000	32,2400	33,6024	33,3724	...	16,6283	...	13,4700
3	0,0000	0,0000	6,7600	11,7624	15,0396	...	17,3072	...	14,0200
4	0,0000	0,0000	0,0000	1,7576	4,3588	...	17,6640	...	14,3091
$\Sigma C_{k,n}$	100,0000	100,0000	100,0000	100,0000	99,9648	...	67,2651	...	54,4894
ф.(6)	100,0000	100,0000	100,0000	100,0000	99,9648	...	67,2651	...	54,4894

Таблица 2 – Расчет диффузии взвеси при ее сбросе в придонный слой

n	Концентрация взвеси по створам в различных слоях ( $C_{k,n}$ )										
	k = 0	1	2	..	12	..	25	..	85	..	125
1	0,0000	0,0000	0,0000	..	15,4210	..	18,4975	..	13,8932	..	11,2545
2	0,0000	0,0000	5,7600	..	19,4733	..	19,9825	..	14,7470	..	11,9461
3	0,0000	24,0000	29,7600	..	24,8093	..	21,3063	..	15,3492	..	12,4339
4	<b>100,0000</b>	74,0000	61,0000	..	28,6405	..	22,1157	..	15,6656	..	12,6902
$\Sigma C_{k,n}$	100,0000	98,0000	96,5200	..	88,3440	..	81,9020	..	59,6550	..	48,3246
ф.(6)	100,0000	98,0000	96,5200	..	88,3440	..	81,9020	..	59,6550	..	48,3246

Из таблиц видно, что модель адекватно реагирует на начальные условия. Это

подтверждает правильность полученных решений.

В табл. 1 выполнен расчет диффузии взвеси при ее сбросе в поверхностный слой. По мере удаления от начального створа под действием силы тяжести взвесь оседает в нижние слои. Однако ее количество в створе остается постоянным ( $\Sigma C_{k,n} = 100$ ) до первого момента касания дна ( $k = 3$ ). Далее количество взвеси в створе уменьшается за счет ее оседания на дно.

В табл. 2 рассмотрен случай сброса взвеси в придонный слой. За счет турбулентной диффузии взвесь распространяется в верхние слои, при этом ее общее количество в створе снижается из-за оседания на дно. На некотором удалении от начального створа ( $k = 25$ ) концентрация взвеси в верхнем слое достигает максимума. После чего она начинает медленно убывать.

Параметром  $f$  можно характеризовать транспортирующую способность потока, поскольку при его малых значениях количество взвеси в потоке будет убывать очень медленно, и эта взвесь будет переноситься потоком на большие расстояния.

**Выводы.** Разработана модель установившейся диффузии взвеси в водном потоке. Модель позволяет рассчитать диффузию взвеси в плоской и пространственной постановке задачи. Безразмерный параметр  $f$ , входящий в модель, учитывает обмен взвесью в потоке между слоями и ее удаление из водной среды за счет оседания. Дальнейшие исследования будут направлены на оптимизацию параметров модели, исследование транспортирующей способности потоков и разработку модели неустановившейся турбулентной диффузии взвеси (залповые сбросы).

### Список литературы

1. Караушев А. В. Речная гидравлика. – Л.: Гидрометеиздат, 1969.– 461 с.
2. Методические основы оценки и регламентирования антропогенного влияния на качество поверхностных вод / Под ред. проф. Караушева А.В. – Л.: Гидрометеиздат, 1987.- 285 с.
3. Юрасов С.Н., Сергиенко О.В. Вывод математической модели и разработка методики расчета турбулентной диффузии взвеси в водном потоке. / Сборник «Климатология, метеорология и гидрология». Вып. 50, 2008. – с. 394

**Математична модель сталої турбулентної дифузії завислої речовини у водному потоці.**

**Юрасов С.Н., Юрасова А.Ю.**

У статті пропонується математична модель сталої турбулентної дифузії завислої речовини, яка зручна для виконання розрахунків на персональних комп'ютерах в табличному редакторі Excel. Модель розроблено у плоскій (по вертикалі та горизонталі) і просторовій постановці задачі. Наведені рекомендації для виконання інженерних розрахунків, а також формули для перевірки правильності цих розрахунків.

**Ключові слова:** математична модель, стала турбулентна дифузія, зависла речовина, водний потік.

**The mathematical model of permanent turbulent diffusion of hanging matter up is in a water-course.**

**S.Urasov, A.Urasova**

In the article the mathematical model of permanent turbulent diffusion of hanging matter up comfortable for implementation of calculations on the personal computers in the tabular editor of Excel is offered. A model is developed at the flat (for vertical lines and horizontal lines) and spatial raising of task. Recommendations for implementation of engineering calculations, and also formulas, are resulted for verification of rightness of these calculations.

**Keywords:** mathematical model, turbulent diffusion, hanging up matter, water-course, became.