

ВИКОРИСТАННЯ ДИСКРИМІНАНТНОЇ ФУНКЦІЇ В КОРОТКОСТРОКОВИХ ПРОГНОЗАХ ПОЯВИ ПЛАВУЧОГО ЛЬОДУ (НА ПРИКЛАДІ РІЧКИ ДНІСТЕР НА ДІЛЯНЦІ М.МОГИЛЬОВ – ПОДІЛЬСЬКИЙ – М.СОРОКИ)

Пропонується застосування дискримінантної функції до короткострокових прогнозів появи плаваючого льоду. Показані переваги методу перед фізико – статистичними залежностями, які рекомендуються для складання методик прогнозу у нормативних документах.

Ключові слова: льодові явища, фізико–статистичні залежності, дискримінантна функція, альтернативний прогноз.

Вступ. Прогнози льодових явищ необхідні для водного транспорту, гідроенергетики, нафтопроводів і газопроводів, гідротехнічного й дорожнього будівництва, промислових виловів риби. Вони також використовуються при плануванні відкриття й закриття навігаційного періоду. Важливою фазою льодового режиму є поява плаваючого льоду на річках. Короткострокові прогнози появи льодових явищ на річках мають велику значущість для судноплавства.

На практиці для прогнозування дат появи льодових явищ зазвичай застосовуються фізико – статистичні залежності, які базуються на установленні стохастичних зв'язків між необхідною для утворення льоду сумою від'ємних температур повітря та показником теплового стану водної маси, яким є температура води у декаду, передуючу прогнозу [5]. Теоретичною основою прогнозів появи льодових явищ є метод теплового балансу граничної поверхні «вода – повітря» [1, 2, 5], який записується наступним чином

$$A + B = 0, \quad (1)$$

де A – потік тепла від водної маси до поверхні поділу “вода – повітря”;

B – результуюча теплових потоків на водній поверхні.

Прогноз появи плаваючого льоду можна випускати згідно з виконанням умови, яка представляється у вигляді

$$\vartheta \leq -\frac{B}{\alpha}, \quad (2)$$

де ϑ - температура вільної поверхні;

α - коефіцієнт віддачі тепла від водного об'єкта до поверхні поділу “вода – повітря”.

Льодоутворення починається тоді, коли температура водної поверхні знижується до температури замерзання, а тепловіддача водною поверхнею тепла в атмосферу B перевищує приплив тепла A з водної товщі. Для прогнозу появи плаваючого льоду використовують залежність вигляду [3]

$$\sum \Theta^- = f(V_0), \quad (3)$$

де $\sum \Theta^-$ - сума від'ємних температур повітря, яка підраховується від дати переходу температур повітря через 0°C на метеорологічній станції, розташованій поблизу ділянки річки;

V_0 - початкова температура води напередодні переходу температур повітря від

позитивних до від'ємних значень або за інтервал часу, передуючий переходу температури повітря через 0°C .

Дата появи льодових явищ відповідає добі, на яку накопичується мінімально необхідна сума від'ємних температур повітря. Застосування графічних побудовань обмежує можливості прогнозу. По-перше, використовується мала кількість показників, які визначають розглядуване явище. По-друге, відокремлююча лінія, яка розрізняє випадки утворення та неутворення льодових явищ, проводиться на графічній площині суб'єктивно, як нижня огинаюча випадків, коли плавучий лід спостерігався.

Метою роботи є застосування у короткострокових прогнозах появи льодових явищ дискримінантного аналізу, який дозволяє отримувати науково обґрунтоване класифікаційне правило при прогнозуванні появи або не появи досліджуваного явища.

Матеріали та методи досліджень. Прогноз появи плавучого льоду є альтернативним прогнозом. Альтернативний прогноз має у своїй основі систему предикторів, які описують теплообмін між водною поверхнею та атмосферою. Задача прогнозу появи плавучого льоду є типовою задачею розпізнавання образів [4]. Суть задачі розпізнавання образів полягає у тому, що, по-перше, необхідно поділити весь простір образів на два підпростори, у першому з яких явище відбувається, а в другому – ні. По-друге, треба побудувати правило, за допомогою якого можна віднести образ, що підлягає розпізнаванню, до того чи іншого підпросторів. Нехай ми маємо множину V векторів-предикторів (образів), що складають простір зображень R_V . Припустимо, що цей простір поділяється на два підпростори R_{V1} і R_{V2} . У першому з них розташовується множина V_1 образів X , при яких явище відбувається, а у другому - множина V_2 образів X , коли явище не відбувається. Треба побудувати поверхню, яка б розділяла підпростори R_{V1} і R_{V2} .

Нехай простір буде двовимірним $R_V = R_V(x_1, x_2)$. Тоді ми маємо на площині (x_1, x_2) лінію $x_1 = f(x_2)$, що відокремлює підпростір R_{V1} від підпростору R_{V2} . Досить простим буде і випадок тривимірного простору $R_V = R_V(x_1, x_2, x_3)$, коли підпростори R_{V1} і R_{V2} розділяє деяка поверхня у тривимірному просторі, рівняння якої має вигляд $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$.

Якщо розглядаються образи із багатовимірного простору $R_V = R_V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, поверхня, що поділяє цей простір на підпростори R_{V1} і R_{V2} , називається відокремлюючою гіперповерхнею, а її рівняння має вигляд

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (4)$$

Після цього треба отримати правило, на основі якого можна віднести вектор X , що підлягає розпізнаванню, до підпростору R_{V1} або підпростору R_{V2} . Це правило називають розв'язувальним правилом. Якщо відповідно до нього приймається рішення, що $X \in R_{V1}$, то явище прогнозується, якщо приймається рішення, що $X \in R_{V2}$, то явище не прогнозується. Етап, який складається з побудови відокремлюючої гіперповерхні та одержання розв'язувального правила, носить назву етапу навчання. Прийняття рішення про належність вектора X до підпросторів R_{V1} чи R_{V2} називають етапом розпізнавання. Множина V векторів-предикторів, на основі якої реалізуються перелічені етапи, називається навчаючою сукупністю. Крім неї, створюється ще й перевірна сукупність, яка використовується для перевірки адекватності моделі альтернативного прогнозу.

Дискримінантною функцією називається функція вигляду [4]

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln P(x_1, x_2, \dots, x_n / V_1) - \ln P(x_1, x_2, \dots, x_n / V_2) + \frac{\delta_a P(V_1)}{\delta_b P(V_2)}, \quad (5)$$

де $P(x_1, x_2, x_n / V_1)$ – умовна ймовірність класу V_1 ;

$P(x_1, x_2, x_n / V_2)$ – умовна ймовірність класу V_2 ;

$P(V_1)$ – апіорна ймовірність класу V_1 ;

$P(V_2)$ – апіорна ймовірність класу V_2 ;

V_1 і V_2 – множини векторів-предикторів;

δ_a – ціна помилки 1-го роду;

δ_b – ціна помилки 2-го роду.

Якщо використовується дискримінантна функція, то розв'язувальне правило набуває вигляду

$$\begin{aligned} X \in V_2, \text{ якщо } F(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0; \\ X \in V_1, \text{ якщо } F(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Рівняння $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ є рівнянням відокремлюючої поверхні для підпросторів R_{V_1} і R_{V_2} .

Квадратична дискримінантна функція має вигляд [3]

$$\begin{aligned} F(x) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln |K_1| - \frac{1}{2} (X - \mu_1)' K_1^{-1} (X - \mu_1) + \frac{n}{2} \ln 2\pi + \\ + \frac{1}{2} \ln |K_2| + \frac{1}{2} (X - \mu_2)' K_2^{-1} (X - \mu_2) + \ln \frac{P(V_1)}{P(V_2)} \end{aligned} \quad (7)$$

або після скорочень

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[(X - \mu_2)' K_2^{-1} (X - \mu_2) - (X - \mu_1)' K_1^{-1} (X - \mu_1) + \ln \frac{|K_2|}{|K_1|} \right] + \ln \frac{P(V_1)}{P(V_2)}, \quad (8)$$

де X – матриця вихідних даних;

μ_1, μ_2 – вектори математичних сподівань 1-го та 2-го класів;

K_1, K_2 – матриці коваріацій 1-го та 2-го класів;

n – кількість векторів-предикторів.

Щоб використовувати дискримінанту функцію (8) при складанні альтернативного прогнозу гідрометеорологічного явища, треба здійснити "етап навчання".

Навчаюча сукупність використовується для того, щоб знайти статистичні оцінки векторів математичних сподівань класів μ_1 і μ_2 , якими є вектори середніх значень \bar{X}_1 і \bar{X}_2 предикторів, а також коваріаційних матриць K_1 і K_2 . На її основі знаходять також і апіорні ймовірності класів $P(V_1)$ і $P(V_2)$. Проведенням цих обчислень і завершується етап навчання розпізнаючої системи (8). Після нього можна переходити до етапу розпізнавання, тобто прогнозу. Він полягає у тому, що вектор предикторів X підставляється у рівність (8) і знаходиться значення дискримінантної функції, що дає можливість за допомогою розв'язувального правила (6) віднести цей вектор до класу V_1 , тобто прогнозувати це явище, або до класу V_2 , тобто явище не прогнозувати.

Дискримінантна функція (8) має операції обернення коваріаційних матриць K_1 і K_2 . Ця операція може призвести до негативних наслідків, коли матриці коваріацій є погано обумовленими. У такому разі похибки, що містяться в коваріаціях, можуть привести до великих похибок коефіцієнтів квадратичних форм і, таким чином, до

помилку на етапі розпізнавання. В ряді випадків ці похибки можуть бути більшими, ніж ті похибки, які ми робимо, беручи умову

$$K_1 = K_2 = K, \quad (9)$$

тобто вважаючи, що матриці коваріацій класів однакові. Частіше за все береться умова

$$K = \frac{K_1 + K_2}{2}. \quad (10)$$

Якщо взяти умову (9) і вважати, що $P(V_1) = P(V_2)$ (останню умову можна виконати, формуючи належним чином навчаючу сукупність), то (8) трансформується до вигляду

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[(X - \mu_2)' K^{-1} (X - \mu_2) - (X - \mu_1)' K^{-1} (X - \mu_1) \right] + (\mu_1 - \mu_2)' K^{-1} X + \frac{1}{2} \left[\mu_2' K^{-1} \mu_2 - \mu_1' K^{-1} \mu_1 \right]. \quad (11)$$

Дискримінантна функція (11) є лінійною дискримінантною функцією. Дійсно, у першому члені правої частини рівності (11) добуток $(\mu_1 - \mu_2)' K^{-1}$ дає вектор-рядок, а добуток його з вектором-стовпцем X - це скалярний добуток цих векторів, тобто лінійна форма відносно координат вектора X . Другий член рівності (11) є скаляр, котрий можна розрахувати, як і вектор коефіцієнтів лінійної форми $(\mu_1 - \mu_2)' K^{-1}$, заздалегідь, ще на етапі навчання.

Використання дискримінантного аналізу значно спрощується, якщо є підстави вважати коваріаційну матрицю діагональною. В цьому випадку спрощується операція обернення матриці коваріації, і отже, спрощується й процедура розрахування коефіцієнтів квадратичних форм у квадратичній дискримінантній функції (8).

Коли виконується умова (9) і, крім того, можна вважати коваріаційну матрицю діагональною, значно спрощується також вигляд лінійної дискримінантної функції (11). У цьому випадку вона набуває вигляду

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{1i} - \mu_{2i}}{\sigma_i^2} x_i + \sum_{i=1}^n \frac{\mu_{2i}^2 - \mu_{1i}^2}{\sigma_i^2}. \quad (12)$$

При практичному використанні розглянутих дискримінантних функцій замість складових векторів математичних сподівань і дисперсій предикторів використовують їхні статистичні оцінки, тобто середні значення і вибіркові дисперсії предикторів.

Критерієм якості в альтернативних прогнозах при використанні дискримінантної функції є число Махаланобіса, позначається як Δ

$$\Delta^2 = (\mu_1 - \mu_2)' K^{-1} (\mu_1 - \mu_2), \quad (13)$$

де μ_1, μ_2 - вектори середніх значень ознак класів V_1, V_2 ;
 K - коваріаційна матриця.

Прогноз вважається якісним, коли число Махаланобіса більше 11 [4].

Результати досліджень та їх аналіз. Як предиктори були використані $\sum \Theta$ - сума від'ємних температур повітря від дати переходу температури повітря через 0°C до дати

утворення плавучого льоду на станціях Могильов-Подільський, Сороки; ϑ_0 - температура води у створах Могильов-Подільський, Сороки перед появою плавучого льоду, яка має непрямим чином описувати теплоємність водної маси; H_1 – рівень води в день переходу температури через 0°C ; H_2 – рівень води в день появи плавучого льоду у створах Могильов-Подільський, Сороки [6].

За даними спостережень були утворені два класи або дві навчальні вибірки. Першому класу відповідають випадки, коли перехід температури повітря через 0°C супроводжувався утворенням плавучого льоду, а другому класу – випадки, коли не супроводжувався. Певна кількість випадків, що не увійшли до навчальних класів, була використана для утворення третьої групи, на якій перевіряються адаптації прогновної моделі.

На першому етапі як предиктори були використані такі ж предиктори, як і при прогнозах за фізико – статистичними залежностями, тобто температура води V_0 та $\sum|\Theta|$.

Для створу р. Дністер – м. Могильов – Подільський була отримана дискримінантна функція вигляду

$$F(x) = 1.78 \sum|\Theta^-| - 0.69V_0 - 9.73, \quad (14)$$

$$\Delta = 21.6,$$

а для створу р. Дністер – м. Сороки

$$F(x) = 0.12 \sum|\Theta^-| - 0.55V_0 + 0.41, \quad (15)$$

$$\Delta = 5.38.$$

На другому етапі до числа предикторів додані такі предиктори як H_1 та H_2 , де H_1 – рівень води в день переходу температури повітря через 0°C , H_2 – рівень води в день появи плавучого льоду.

Результати розрахунків показали, що використання H_1 або H_2 не впливає на кінцевий результат. Це відбувається внаслідок того, що рівні змінюються у часі незначно. Для збільшення завчасності прогнозу більше підходять H_1 (рівні води в день переходу температури повітря через 0°C).

Одержана дискримінантна функція для створу р. Дністер – Могильов–Подільський має такий вигляд

$$F(x) = 3.43 \sum|\Theta^-| - 0.77V_0 - 0.12H_1 + 0.31, \quad (16)$$

$$\Delta = 32.1,$$

а для створу р. Дністер – Сороки

$$F(x) = 0.16 \sum|\Theta^-| - 0.56V_0 - 0.02H_1 + 4.71, \quad (17)$$

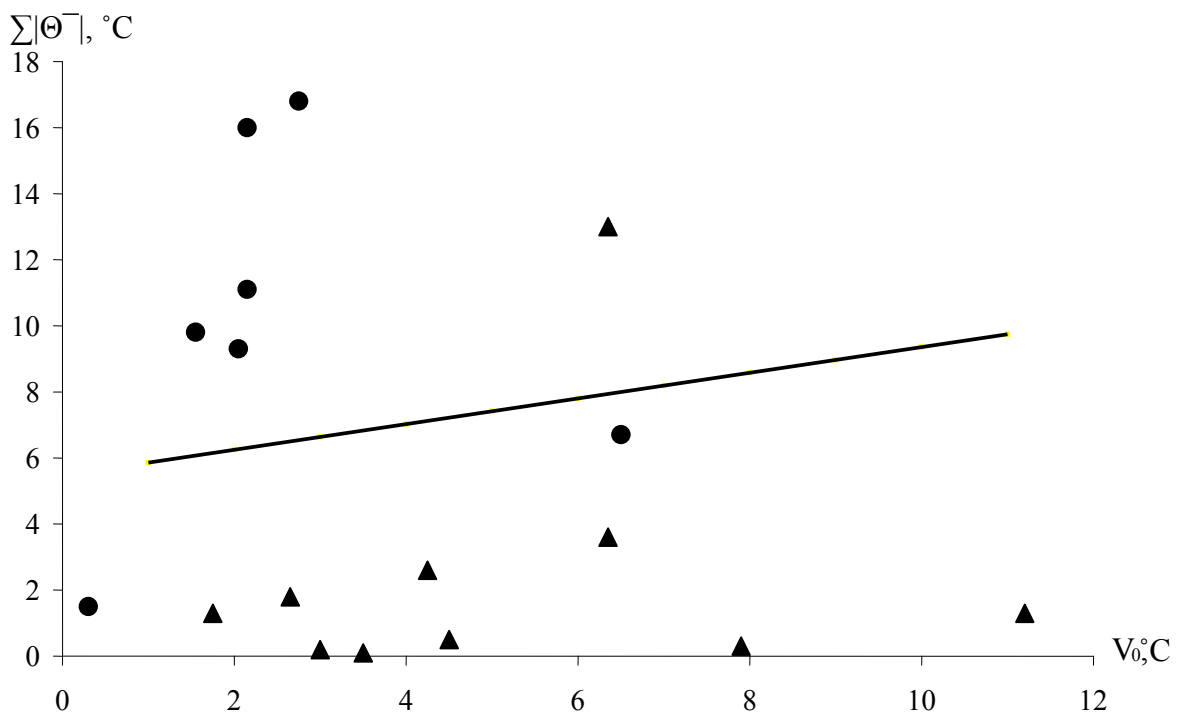
$$\Delta = 24.8,$$

де Δ - число Махаланобіса.

Введення у прогностичну методику додаткового предиктора значно покращує результат.

На рис. 1 показаний класично вигляд прогностичної методики, яка використовується для прогнозу появи льодових явищ. Вище лінії поділу розташовується підпростір R_{V1} , нижче лінії поділу – підпростір R_{V2} . Лінію поділу застосовують для прогнозу наступним чином. Для заданої температури води за лінією поділу визначають $\sum|\Theta^-|_{\min}$, тобто мінімальну суму від’ємних температур від дати переходу температури повітря через 0°C до дати появи льодових явищ. Надалі підраховується фактична сума від’ємних температур від дати переходу через 0°C до дати випуску прогнозу. Якщо $\sum|\Theta^-| < \sum|\Theta^-|_{\min}$, то появи плавучого льоду не буде. Якщо $\sum|\Theta^-| \geq \sum|\Theta^-|_{\min}$, то прогнозується поява льоду.

Застосування дискримінантної функції дозволяє уникнути цих підрахунків та розширити кількість предикторів.



● – випадки, коли плавучий лід утворюється; ▲ – випадки, коли лід не утворюється.

Рисунок 1 – Графік залежності $\sum|\Theta^-| = f(V_0)$ для р. Дністер – Могильов-Подільський.

В короткострокових прогнозах дат появи льодових явищ допустима похибка береться в залежності від завчасності прогнозу. Оскільки короткостроковий прогноз складається на основі метеорологічного прогнозу, то допустима похибка дорівнює половині завчасності метеорологічного прогнозу.

Виконані перевірені прогнози для р. Дністер - м. Могильов-Подільський і для р. Дністер – м. Сороки. Оцінка якості і точності прогностичної методики при прогнозах дат оцінюється через забезпеченість допустимої похибки прогнозів

$$p = \frac{n-m}{n} * 100\%, \quad (18)$$

де p – забезпеченість прогнозу;

n – загальна кількість прогнозів;

m – кількість прогнозів, що не виправдались.

Висновки і перспективи подальших досліджень. У статті на основі використання даних по річці Дністер показана можливість та перевага використання дискримінантного аналізу у порівнянні із фізико-статистичним методом. По-перше, більш точно проводиться поверхня поділу між класами. По-друге, дискримінантна функція дозволяє розширити число предикторів і використовувати для прогнозів більшу кількість предикторів. Виконані перевірні прогнози показали незадовільний результат для створу р. Дністер – м. Могильов-Подільський. Для покращення результатів пропонуємо використовувати більшу кількість предикторів. Для створу р. Дністер – м. Сороки перевірні прогнози показали добрий результат ($p = 85\%$), що дозволяє використовувати цю методику для прогнозу появи льодових явищ на р. Дністер.

Список літератури

1. Аполлов Б.А., Калинин Г.П., Комаров В.Д. Курс гидрологических прогнозов. – Л.: Гидрометеоздат, 1984.
2. Бефани Н.Ф., Калинин Г.П. Упражнения и методические разработки по гидрологическим прогнозам. – Л.: Гидрометеоздат, - 1983. – 390 с.
3. Лобода Н.С. Гідрологічні прогнози (конспект лекцій). – Одеса.: 2003. – 138с.
4. Школьний Є.П., Лоева І.Д., Гончарова Л.Д. Обробка та аналіз гідрометеорологічної інформації. – Одеса.: 1999. – 600с.
5. Руководство по гидрологическим прогнозам. – Вып. 3. Прогноз ледовых явлений на реках и водохранилищах. – Л.: Гидрометеоздат. – 1989. – 168с.
6. Ресурсы поверхностных вод СССР. – т. 6. – Вып. 2. – Л.: Гидрометеоздат. 1974 – 657с.

Использование дискриминантной функции в краткосрочных прогнозах появления плавающего льда на примере реки Днестр на участке г. Могилёв -Подольский – г. Сороки.

Лобода Н. С., Сиренко А. Н.

Рассмотрен вопрос прогноза дат появления ледовых явлений с использованием дискриминантной функции. Объектом исследования является река Днестр. Результаты исследований доказывают целесообразность использования дискриминантной функции в краткосрочных прогнозах.

Ключевые слова: *ледовые явления, физико-статистические зависимости, дискриминантная функция, альтернативный прогноз.*

The use of discrimination function in the shortterm prognoses of appearance of floating ice on the example of river Dnestr on district c. Mogilov – Podilsciy – c. Soroki. Loboda N. S., Sirencо A. M.

The question of prognosis of dates of appearance of the ice phenomena with the use of discrimination function is considered. A river Dnestr is a research object. The results of researches confirm expedience of application of discriminantnoi function in shortterm prognoses.

Keywords: *the ice phenomena, physical–statistical dependence, discrimination function, alternative prognosis.*