

УДК 551.589

**В.А. Ефимов**, д. ф.-м. н. проф., **Г.П. Ивус**, к. геогр.н., доц.,

**О.Н. Грушевский** к. геогр. н.

Одесский государственный экологический университет

## ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ ПОЛЯ СКОРОСТИ СИНОПТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Предлагается методика тензорного анализа деформаций в поле скорости. Это позволяет отделить низкочастотные колебания атмосферы от происходящих на их фоне быстротекущих синоптических процессов.*

**Ключевые слова:** тензорный анализ деформации, сферические функции, нормальная и аномальная дисперсия.

**Введение.** Производная по времени от тензора деформации определяет скорость, с которой она осуществляется. Сама деформация содержит целый спектр частот, т.е. одновременно происходит в высоко- и низкочастотном диапазонах. Для выделения деформации климатического фона необходим анализ скорости происходящих деформационных перестроек.

Считаем, что низкочастотные колебания соизмеримы с сезонными колебаниями и стоит задача их отделения от процессов внутрисезонной изменчивости. Фильтрация низкочастотных колебаний на фоне короткопериодных погодообразующих процессов может быть выполнена методом инициализации низкочастотного процесса в спектре его собственных колебаний. При этом, согласно [1, 2], основной системой уравнений динамики атмосферы является

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - x \Delta \psi - (1 - x^2) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta z &= 0; \\ \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + x \Delta \varphi + (1 - x^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{g h_k}{(2 \omega a)^2} \Delta \varphi &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a$  - радиус Земли;  $\omega$  - угловая скорость вращения Земли;  
 $h_k$  -  $k$ -ое собственное значение уравнения для вертикальной структуры;  
 $g$  - ускорение силы тяжести;  $\varphi$  - потенциал скорости;  $\psi$  - функция тока;  
 $x = \cos \theta$ ;  $(\theta, \lambda)$  - сферические координаты;  
 $z$  - высота эквивалентно - баротропного уровня.

Здесь

$$\begin{aligned} v_\theta &= -\frac{1}{a} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + (1 - x^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] / \sqrt{1 - x^2}, \\ v_\lambda &= -\frac{1}{a} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - (1 - x^2) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] / \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

и собственные колебания атмосферы, согласно решению системы (1), ищутся в виде

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} e^{i(m\lambda - \delta)},$$

где  $m$  – зональное волновое число;  $\delta$  – собственная частота в безразмерной форме.

Приведенный метод решения полной собственной проблемы для системы (1) определяет частоты собственных колебаний в планетарной атмосфере в линейном приближении модели гидродинамики атмосферы.

Соответственно, **целью исследования** является разработка методики для выделения низкочастотных и погодообразующих колебаний из общего спектра путем:

- а) отделения высокочастотных процессов, согласно решению (1);
- б) построения тензора деформации для высокочастотного процесса, с использованием полученного векторного поля скоростей;
- в) получения тензора низкочастотной деформации методом вычитания тензора деформации для высокочастотного процесса из тензора полной деформации.

**Материалы и методы исследований.** Известно [3], что контравариантные компоненты тензора деформации определяют конечную ее стадию, а ковариантные соответствуют начальному состоянию. Тензорные производные от деформации позволяют оценить конструктивные особенности её структуры. Если тензорная производная велика, то на этом участке деформация приводит к возникновению фронтальной структуры, если же такая структура возникает в низкочастотном диапазоне, то это указывает на то, что фронт имеет долгопериодный характер перестройки.

Тензор деформации, согласно [4], представим в виде

$$\begin{pmatrix} 2(\varepsilon_1 - e) & \theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 2(\varepsilon_2 - e) & \theta_1 \\ \theta_2 & \theta_1 & 2(\varepsilon_3 - e) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \varepsilon_1; & \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \varepsilon_2; & \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \varepsilon_3; \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \theta_1; & \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} &= \theta_2; & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} &= \theta_3. \end{aligned}$$

Тензор (2) можно представить через моменты связи. Ограничивая расчёт только проекциями тензора на поверхность сферы земного шара, приведём его компоненты к виду

$$\begin{pmatrix} \overline{V'^2} & \overline{V'U'} \\ \overline{V'U'} & \overline{U'^2} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $V'$ ,  $U'$  – покомпонентная дисперсия;  $\overline{V'U'}$  – ковариационный момент.

Тензор (3) является, в определённой мере, аналогом тензора (2). Тогда первая производная от тензора (3) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \overline{V'^2}}{\partial t} &= -\frac{i}{a} \left[ \overline{V'^2} L_1(\overline{V}) + 2\overline{V} \overline{V' L_1(V')} + \overline{V'^2} L_1(V') \right] - \\
 &- \frac{i}{a} \left[ L_2(\overline{V}) \overline{V' U'} + \overline{V} \overline{U' L_2(V')} + \overline{U' V' L_2(V')} + \overline{V' U' L_2(V')} \right] + \\
 &+ 4\omega i \cos \theta \overline{V'^2} + \frac{2i}{a} \overline{V' L_6(p')}; \\
 \frac{\partial \overline{U'^2}}{\partial t} &= -\frac{i}{a} \left[ \overline{U'^2} L_4(\overline{U}) + 2\overline{U} \overline{U' L_4(U')} + \overline{U'^2} L_4(U') \right] - \\
 &- \frac{i}{a} \left[ L_3(\overline{U}) \overline{V' U'} + \overline{V} \overline{U' L_3(U')} + \overline{U' V' L_3(U')} + \overline{V' U' L_3(U')} \right] + \\
 &+ 4\omega i \cos \theta \overline{U'^2} + \frac{2i}{a} \overline{U' L_6(p')}; \\
 \frac{\partial \overline{V' U'}}{\partial t} &= -\frac{i}{2a} \left[ \overline{V'^2} L_3(\overline{U}) + 2\overline{V} \overline{V' L_3(U')} + \overline{V'^2} L_3(U') \right] - \\
 &- \frac{i}{2a} \left[ \overline{V' U' L_4(\overline{U})} + \overline{U' V' L_4(U')} + \overline{V' U' L_4(U')} + \overline{V' U' L_4(U')} \right] + \\
 &+ \frac{i}{a} \overline{V' L_5(p')} - \frac{i}{2a} \left[ \overline{U'^2} L_2(\overline{V}) + 2\overline{U} \overline{U' L_2(V')} \right] + \frac{i}{a} \overline{U' L_6(p')} - \\
 &- \frac{i}{2a} \left[ \overline{V' U' L_1(\overline{V})} + \overline{U' V' L_1(V')} + \overline{V' U' L_1(V')} + \overline{V' U' L_1(V')} \right];
 \end{aligned} \tag{4}$$

$p$  – давление;  $a$  - радиус Земли;

$$L_j = \frac{\partial}{\partial \theta} - (-1)^j \frac{\partial}{\partial \lambda} + b_j \operatorname{ctg} \theta(\dots); \quad (j = 1, 2, \dots, 6); \quad b_j = \begin{cases} 1 & \text{при } j = 1; 4 \\ -1 & \text{при } j = 2; 3 \\ 0 & \text{при } j = 5; 6 \end{cases} .$$

Скорость смещения волновых колебаний представим в виде:

$$c = \omega k^{-l}, \tag{5}$$

где  $\omega$  - частота,  $k$  - волновое число.

Решения уравнений (4) дают целый спектр скоростей деформации и определяют за какое время она произойдет. Представим, согласно [5], этот спектр в виде разложения в ряды по системе тензор – вектор сферических функций

$$\left\| \begin{array}{cc} \overline{V'^2} & \overline{V' U'} \\ \overline{V' U'} & \overline{U'^2} \end{array} \right\| \approx \left\| \begin{array}{cc} \sum_{l=2}^L \sum_{n=-l}^l \dot{A}_{V'^2} e^{-in\lambda} P_{2n}^l(\cos \theta) & \sum_{l=2}^L \sum_{n=-l}^l \dot{A}_{V'U'} e^{-in\lambda} P_{0n}^l(\cos \theta) \\ \sum_{l=2}^L \sum_{n=-l}^l \dot{A}_{V'U'} e^{-in\lambda} P_{0n}^l(\cos \theta) & \sum_{l=2}^L \sum_{n=-l}^l \dot{A}_{U'^2} e^{-in\lambda} P_{-2n}^l(\cos \theta) \end{array} \right\|$$

или

$$\|T_{ij}\| = \sum_{l=m_i, j}^L \sum_{n=-l}^l \dot{A}_{m_i, n, l} e^{-in\lambda} P_{m_i, n}^l(\cos \theta), \tag{6}$$

где  $m_i$  - номер компоненты тензора (3) (левый нижний индекс – указатель соответствующей системы тензор–вектор сферических функций);

$(l-n+1, n)$  - компоненты волнового вектора;

$P^l_{m_i, n}$  - присоединённые полиномы тензор–вектор сферических функций;

$\dot{A}_{V'^2}, \dot{A}_{V'U'}, \dot{A}_{U'^2}$  - спектральные моды компонент тензора деформации.

Волновое число  $L$  определяет границу учитываемых волновых возмущений.

Тогда, разлагая скорость деформации в спектр волновых чисел

$$\sqrt{(l - n + 1)^2 + n^2}, \quad (7)$$

определяем спектр частот в деформационном процессе. В отличие от решения системы (1), такой спектр частот соответствует нелинейному процессу. Каждой компоненте тензора деформации (3) соответствует член разложения (6), имеющий свою отдельную частоту. Естественно, что в сложных процессах отдельный спектральный элемент может иметь присущий ему спектр частот, но при большом разрешении ряда (6) можно ограничиться выбором интересующей частоты. Система (1), также решается в виде ряда по сферическим функциям, которые имеют свои наборы частот. Поскольку (7) определяет волновое число для непрерывного спектра, то при анализе следует отделить только целые значения волнового вектора. При этом необходимо ввести логический анализ дисперсии колебаний:  $d\omega(k) / dk = dc(\lambda) / d\lambda > 0$ , поскольку и крупномасштабные низкочастотные деформации, и высокочастотные колебания в масштабах синоптических процессов, обычно имеют нормальную дисперсию. Поэтому суммарная деформация, получаемая по системе (4) и по восстановлению ряда (6), имеет групповую скорость

$$c_2 = c - (dc/d\lambda) \lambda < c.$$

Если фазовая скорость увеличивается с уменьшением длины волны, то это аномальная дисперсия. Естественно, что фазовая скорость волнового возмущения больше на деформационных процессах, идущих в высокочастотном диапазоне. Таким образом, согласно [6], явления, соответствующие временным интервалам процессов мезо- и синоптического масштабов, опознаются в спектре скорости деформации по аномальной дисперсии:  $d\omega(k) / dk > \omega(k) / k$ . Тогда восстанавливая ряды, имеющие отличные от нуля только те моды, которые имеют аномальную дисперсию, получим положение указанных процессов и функцию подобную кинетической энергии в виде:  $VU = (-v_\lambda - iv_\theta) (v_\lambda - iv_\theta) = -v_\lambda^2 - v_\theta^2$ .

Конформно отображая сферу на комплексную плоскость и вводя вместо сферических функций мультиполи [6], получаем поля с низкочастотной скоростью деформации, определяемые из расчёта производной тензора деформации, и поля высокочастотных процессов с аномальной дисперсией.

Волновое число известно по положению моды в ряде (6). Скорость  $c$  известна из расчётов скорости деформации, причём эта скорость в спектральной форме решения системы (4) будет фазовой скоростью конкретной сферической волны. Тогда частота  $\omega = ck$  подобна собственной частоте  $\sigma$  из решения системы (1). Ряд, предназначенный для выражения высокочастотных процессов с аномальной дисперсией, может быть представлен в форме

$$\sum_{l=0}^L \sum_{n=-l}^l \dot{A}_{\overline{VU'}}^* e^{-in\lambda} P_{0n}^l(\cos \theta) = c(\theta, \lambda), \quad (7)$$

где  $\dot{A}_{\overline{VU'}}^*$  - моды с аномальной дисперсией (символ \* выделяет моды с аномальной дисперсией, остальные моды ряда (7) приравнены к нулю). Если для каждого члена ряда (7)

$$A_{\overline{VU'}}^* e^{-in\lambda} P_{0n}^l(\cos \theta) = c_{l,n}, \quad (8)$$

где  $c_{l,n}$  - фазовая скорость отдельной волны, выполняется неравенство  $dc_{l,n}/d\lambda < 0$ , то эта волна действует с аномальной дисперсией. Тогда ряд (7), имеющий составляющие (8), восстанавливает поле деформаций, обуславливающее аномальную дисперсию.

**Результаты исследований и их анализ.** Для индикации спектра тензора деформации, происходящей с аномальной дисперсией, считаем, что волновое число границы спектра находится достаточно далеко от мод низкочастотного тренда. Практически же заменяем соответствующие им сферические функции мультиполями при их конформном отображении на комплексную плоскость.

Проанализируем деформационную ситуацию функции тока (рис.1а) типовой синоптической ситуации [7] для выявления низкочастотной деформации и высокочастотных процессов с аномальной дисперсией, которые характерны для временных интервалов мезо ( $\alpha, \beta$ )- и синоптического масштаба.

Функция тока низкочастотной составляющей рассматриваемого процесса представлена на рис. 1б. Видно, что процессы антициклогенеза занимают большую

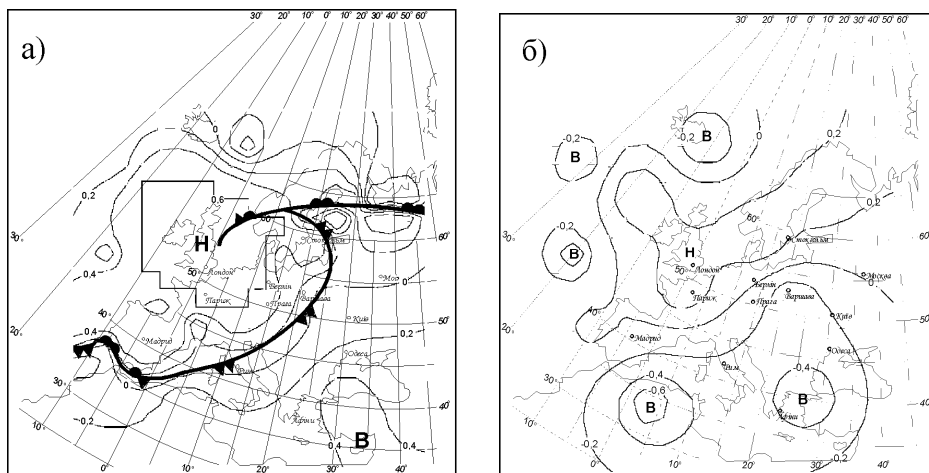


Рисунок 1 - Функции тока в (усл. ед.) типowego процесса (а) и его низкочастотной составляющей (б).

площадь, распространяясь на области, над которыми в исходном процессе преобладала циклоническая циркуляция. Можно предположить, что направление возможной долгосрочной перестройки будет связано именно с эволюцией антициклонической структуры. Тем самым, в низкочастотном процессе отфильтровываются колебания погодообразующего плана (рис.2), с более высокими частотами. Последние же имеют

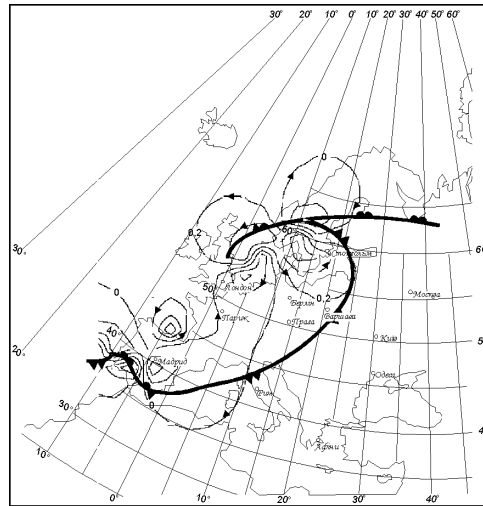


Рисунок 2 - Функция тока (в усл. ед.) процесса с аномальной дисперсией (стрелками указано направление циркуляции воздуха).

нормальную дисперсию, чем отличаются от колебаний с аномальной дисперсией, присущих, например, атмосферным фронтам и связанными с ними (мезомасштабным конвективным системам, потокам промежуточных масштабов) явлениям. Анализ рис.2 показывает, что локализация высокочастотных, погодообразующих процессов приходится на наиболее активные участки атмосферных фронтов: вершину волны, точку окклюзии, части теплого и холодного фронтов, расположенных в зоне активной циклонической циркуляции. Это делает возможным идентификацию районов с наиболее «активным вкладом» в формирование погодных условий.

**Выводы:**

1. Тензорный анализ скорости деформации текущего синоптического процесса позволяет выделить в ней как низкочастотные составляющие с нормальной дисперсией, так и составляющие высокочастотных процессов с аномальной дисперсией.
2. Низкочастотные составляющие определяют области, в которых формируется процесс возможной долгосрочной перестройки, что позволяет очертить возможные причины формирования указанной перестройки и факторы, оказывающие на нее влияние.
3. Расположение процессов с аномальной дисперсией выявляет локализацию высокочастотных погодообразующих процессов, что, в качестве дополнительной информации, может учитываться при составлении краткосрочных прогнозов.

Авторы статьи выражают благодарность Е.О.Грушевскому за активную помощь в оформлении рисунков.

### Список литературы

1. Ефимов А.В., Петерсон В.Б. Нелинейная инициализация информации с нескольких спутниковых витков для дистанционного зондирования (ИСЗ) полей ветра // Метеорологія, кліматологія та гідрологія, 2003.-Вип.47.- С.24 – 36.
2. Машкович С.А. Спектральные модели общей циркуляции атмосферы и численного прогноза погоды.- Л.: Гидрометеиздат, 1986.- 287 с.
3. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.- М., 1938.- 456 с.
4. Кочин Н.Е., Кибель И. А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика.- М.: ГИТТЛ. - т.1, 1948.- 487 с.
5. Ефимов В.А. Математическое моделирование долговременных нестационарных планетарных процессов в системе океан – атмосфера.- Л.: Гидрометеиздат, 1976.- 256 с.
6. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики.- М.: ФМ, 1962.-767 с.
7. Ивус Г.П., Ефимов В.А. Физика антициклогенеза.- К.: КНТ, 2005.- 207 с.

#### **Тензорний аналіз поля швидкості синоптичних процесів.**

**Єфімов В.А., Івус Г.П., Грушевський О.М.**

*Пропонується методика тензорного аналізу деформацій у полі швидкості. Це робить можливим відокремлення низькочастотних коливань атмосфери від швидкоплинних синоптичних процесів, що відбуваються на їхньому фоні.*

**Ключові слова:** тензорний аналіз деформацій, сферичні функції, нормальна та аномальна дисперсії.

#### **Tensor analysis of the field of speed for synoptic processes.**

**Yefimov V., Ivus G., Grushevsky O.**

*The technique of tensor analysis of deformation in the field of speed is offered. It allows to separate low frequency oscillations of atmosphere from the transient synoptic processes which take place on their background.*

**Key words:** tensor analysis of deformation, spherical functions, normal and anomalous dispersion.