УДК 539.12

Г.А. Кузаконь
Одесский государственный экологический университет

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ РАССЛОЕНИЙ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В работе предлагается метод вычисления дифференциальных инвариантов расслоений $\varphi : R^n \to R$. Найдены явные формулы для вычисления дифференциальных инвариантов второго порядка.

Ключевые слова: *дифференциальные инварианты расслоений, эвклидовы пространства*

Введение. Действие структурной псевдогруппы Ли.Рассмотрим субмерсии $\varphi : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ и псевдогруппу Г порождённую движениями евклидова пространства R^n и диффеоморфизмами прямой R. В работе [1] описано продолженное действие Г на пространствах К-струй $J^K(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$. В случае $K = 2$ координатами в $J^2(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$ являются наборы (x_i, u, p_i, p_{ij}). Размерности пространств $J^2(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$ будут равны

$$\dim J^2\left(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}\right) = n + C_{n+2}^2 .$$

Базис алгебры Ли псевдогруппы Ли Г образуют векторные поля

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n} \\ x_i \dfrac{\partial}{\partial x_j} - x_j \dfrac{\partial}{\partial x_i} \\ h(u)\dfrac{\partial}{\partial u},\ h(n) \in C^\infty(\mathrm{R}) \end{cases} .$$

Дифференциальные инварианты второго порядка это функции на $J^2(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$ инвариантные относительно продолжения действия Г в $J^2(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$.

Алгебра Ли псевдогруппы отождествлена с алгеброй Ли контактных векторных полей x_1 [3,4] с производящими функциями вида:

$$f = h(u) + \sum_{i=1}^{n} a_i p_i + \sum_{i<j} a_{ij}\left(p_i x_j - p_j x_i\right).$$

Общую формулу для нахождения $X_f^{(2)}$ см. в [3]. В частности когда $f = h(u)$, то

$$X_h^{(2)} = h(u)\frac{\partial}{\partial u} + h'(u)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial p_{ij}}\right) + h''(u)\sum_{i,j} p_i p_j \frac{\partial}{\partial p_{ij}} . \quad (1)$$

В работе [1] показано, что размерность орбиты общего положения в $J^2(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$ равна $n + C_n^2 + 3$, поэтому размерность алгебры инвариантов второго порядка равна $C_{n+2}^2 - C_n^2 - 3 = 2n - 2$.

Нахождение дифференциальных инвариантов второго порядка. Пусть $g(x_i, u, p_i, p_{ij})$ – дифференциальные инварианты второго порядка, тогда g является первым интегралом для контактных векторных полей $X_f^{(2)}$ вида (1) с производящей функцией $h(u)$. Кроме того g инварианты группы движений. Отсюда следует, что $g = g(p_i, p_{ij})$. Подмногообразие $(x, u, p)\big|_{p=0}$ в многообразии $J^1(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$ является орбитой псевдогруппы Г, и орбиты общего положения в пространстве $J^2(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$ определяются своим пересечением со слоем проекции $J^2(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}) \to J^1(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$.

Для нахождения инвариантов второго порядка фиксируем точку $(0, 0, p) \in J^1(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$, $p = (p_1, \dots p_n) = 0$. Слой F проекции $J^2(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}) \to J^1(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$ образован симметрическими тензорами $r = \|p_{ij}\|$, которые мы будем отождествлять с квадратичными формами на пространстве R^n. Пересечение орбиты псевдогруппы Г со слоем F суть орбиты подгруппы Н сохраняющей данную точку p. Тем самым элементы подгруппы Н – это, во-первых, вращения сохраняющие ковектор p, а во-вторых, трансвекции, то есть преобразования вида: $r \to r + t p^2$ $(t \in \mathrm{R})$. Здесь через p^2 обозначен квадрат ковектора p, то есть квадратичная форма вида $\|p_i p_j\|$. Рассмотрим подпространство $\tilde{\mathrm{R}}^n$ пространства R^n, образованное такими векторами x, что $\langle p, x\rangle = 0$. Обозначим через $\tilde{r}$ ограничение квадрики r на $\tilde{\mathrm{R}}^n$. Тогда действие группы Н определяет действие подгруппы вращений, сохраняющих ковектор p на квадратичных формах $\tilde{r}$. Инварианты этого действия и определяют дифференциальные инварианты второго порядка псевдогруппы Г. В качестве этих инвариантов (см. [1]) можно выбрать коэффициенты I_1, I_2, ..., $I_{n\text{-}1}$ характеристического многочлена, отвечающего $\tilde{r}$ $\det|\lambda E - \tilde{r}| = \lambda^{n-1} + I_1 \lambda^{n-2} + \dots + I_{n-1}$.

Обозначим e_1, e_2, ..., $e_{n\text{-}1}$ ортонормированный базис формы $\tilde{r}$ в $\tilde{\mathrm{R}}^n$. Трансвекции не меняют инварианты I_1, I_2, ..., $I_{n\text{-}1}$, а так же собственный базис e_1, e_2, ..., $e_{n\text{-}1}$. Значение формы r на ковекторе p выбором трансвекции всегда можно сделать нулевым. При этом форма r перейдёт в форму

$$r_0 = r - \frac{r(p,p)}{(p,p)^2} p^2 .$$

Значения формы r_0 на парах векторов p и $e_к$ дают инварианты группы Н. Инвариантами I_1, ..., $I_{n\text{-}1}$, g_1, ..., $g_{n\text{-}1}$ исчерпываются все инварианты второго порядка [1].

Пример.

1. Пусть $n = 2$. Тогда прямая $\tilde{E}_2$ – порождена вектором

$$e_1 = \frac{1}{|p|}(-p_2, p_1)$$

и квадрика $\tilde{r}$ на прямой $\tilde{E}_2$ имеет вид:

$$\tilde{r}(l_1, e_1) = \frac{1}{|p|^2}\left(p_{11}p_2^2 - 2p_1p_2p_{12} + p_{22}p_1^2\right).$$

Учитывая инвариантность I_1 относительно векторного поля

$$X_u^{(2)} = u\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{2} p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i<j} p_{ij} \frac{\partial}{\partial p_{ij}} .$$

Находим:

$$I_1 = \frac{1}{|p|^{3/2}}\left(p_{11}p_2^2 - 2p_1p_2p_{12} + p_{22}p_1^2\right).$$

Соответственно, получаем

$$g_1 = \frac{p_1 p_2 (p_{22} - p_{11}) + p_{12}(p_1^2 - p_2^2)}{|p|^{3/2}}.$$

Отметим, что инвариант I_1 вычисляет кривизну кривой семейства, а инвариант g_1 равен квадрату кривизны ортогональной траектории семейства [2].

Приведём другой метод вычисления дифференциальных инвариантов второго порядка. Опишем действие группы Ли в $J^2(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$. Рассмотрим пару (r, p), где $r = \|p_{ij}\|$ – симметрический 2-тензор, $p = \|p_i\| \neq 0$ ковектор. Пусть Γ_2 – группа преобразований из нашей псевдогруппы Г, сохраняющая точку $(0, 0, a) \in J^2(\mathrm{R}^n, \mathrm{R})$ и действующая на слое F проекция

$$J^2(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}) \to J^0(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}) : (x, u, p, r) \mapsto (x, u).$$

Нетрудно видеть, что группа Γ_2 порождена вращениями $A \in SO(n)$

$$A : (r, p) \mapsto (A\, r\, A', A\, p) \tag{I}$$

масштабными преобразованиями

$$(p, r) \mapsto (\lambda\, p, \lambda_2, \lambda \in \mathrm{R}) \tag{II}$$

и трансвекциями

$$(p, r) \mapsto (p, r + \lambda\, p^2), \ \lambda \in \mathrm{R}. \tag{III}$$

Действие алгебры Ли Γ_2 эффективно, а поэтому размерность пространства орбит F/Γ_2 равна

$$\dim(\mathrm{F}/\Gamma_2) = \dim \mathrm{F} - \dim \Gamma_2 = 2n - 2.$$

Опишем орбиты действия группы $SO(n)$ на слое F. С этой целью представим пару (p, r) как симметрическую 2-форму $\hat{r}$ на $(n + 1)$-мерном пространстве, задаваемую матрицей

$$\hat{r} = \begin{Vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} & p_1 \\ p_{21} & \cdots & p_{2n} & p_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} & p_n \\ p_1 & \cdots & p_n & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} r & p \\ p & 0 \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Каждое преобразование $A \in SO(n)$ определяет вращение

$$\hat{A} = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \in SO(n+1).$$

При этом

$$\hat{A}\, \hat{r}\, \hat{A}' = \begin{Vmatrix} A\, r\, A' & A\, p \\ A\, p & 0 \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Поэтому действие (I) эквивалентно действию (3) подгруппы $SO(n) \subset SO(n + 1)$ на пространстве симметрических $(n + 1) \times (n + 1)$ матриц. Положим

$$t_1(p,r) = tr(\hat{r}) = tr(r),\ t_2(p,r) = tr(r^2),\ \dots,\ t_{n+1}(p,r) = tr(r^{n+1}). \tag{4}$$

Тогда, очевидно, что $t_1,\dots t_{n+1}$ – полная группа инвариантов действия группы $SO(n + 1)$. Эти функции также инварианты действия подгруппы $SO(n)$ [4,5].

Обозначим через $\lambda_1(p_1 r),\dots,\lambda_{n+1}(p_1 r)$ собственные числа матрицы $\hat{r}$. Тогда существует ортогональное преобразование $A_{n+1}(r) = A_{n+1} \in SO(n+1)$, приводящее матрицу $\hat{r}$ к диагональному виду $A_{n+1}\, r\, A'_{n+1} = \|\lambda_i\, \delta_{ij}\|$. Это преобразование определено с точностью до элементов $S \in SO(n+1)$ являющихся симметриями диагональной матрицы $\|\lambda_i\, \delta_{ij}\|$, т.е. (для орбит общего положения) – с точностью до элементов группы $\sum_{n+1}$, порожденной преобразованиями $\sigma_{ij} \in SO(n+1);\ \ i < j$, где σ_{ij} – диагональные матрицы с 1 на диагонали на всех местах, кроме i-го и j-го, где стоят – 1.

Как известно, $SO(n+1)/\,SO(n) = S^n$.Пусть $M = S^n / \sum_{n+1}$ – пространство орбит действия группы $\sum_{n+1}$ на сфере S^n. Тогда каждая функция f на M определяет $\sum_{n+1}$ – инвариантную функцию на S^n и $SO(n)$ – инвариантную функцию на $SO(n+1)$ которую мы по-прежнему будем обозначать через f. Определяем $SO(n)$ – инвариант I_f на пространстве матриц r типа (2), положив

$$I_f(r) = f(A_{n+1}(r)). \tag{5}$$

Обозначим через $C^\infty(\mathrm{M})$ пространство гладких функций на n-мерной сфере S^n, инвариантных относительно действия группы $\sum_{n+1}$. Тогда формула (5) дает описание инвариантов относительно действия (1). Эти функции автоматически инварианты относительно масштабных преобразований (II). Чтобы исключить преобразования (III) достаточно рассмотреть такие пары (p, r) в которых тензор r обращается в нуль на ковекторе p. Для этого достаточно перейти к паре $(p,r) \mapsto (p,r_0)$, где $r_0 = r - \dfrac{r(p,p)}{(p,p)^2}\, p^2$.

Здесь $r(p,p) = \sum p_{ij}\, p_i\, p_j$; $(p;p) = \sum p_i^2$, $p^2 = \|p_i\, p_j\|$.

Итак функции I_f^0 , $f \in C^\infty(\mathrm{M})$, $I_f^0 = I_f\,(p,r_0)$ являются инвариантами группы Γ_2.

Функции $t_1^0(p,r) = t_1(p,r_0)$, ..., $t_{n+1}^0(p,r) = t_{n+1}(p,r_0)$ определяют инварианты $SO(n)$-действий и действия (III), но

$$t_i^0(\lambda p, \lambda r) = \lambda^i\, t_i^0(p,r).$$

Поэтому функции $T_j(p,r) = \dfrac{t_j^0(p,r)}{\left(t_1^0(p,r)\right)^j}$, $j = 1, \dots, n + 1$ является инвариантами группы Γ_2.

Окончательно получаем следующий результат. Теорема. Дифференциальные инварианты 2-го порядка порождены функциями: $T_1(p,r),\dots,T_{n+1}(p,r)$ и $I_f^0(p,r)$, где $f \in C^\infty(\mathrm{M})$.

Список литературы

1. *Кузаконь В. М., Рахула М. О.* Инварианты расслоения локально-евклидовой поверхности// Укр. геометр. Сб. "Вища школа".-1978.-Т.21. –С. 44-50.
2. *Кузаконь В. М.* Дифференциальные инварианты субмерсий многовидов // Весник Госуниверситету "Львовская политехника". Сер. Прикладная математика. – 1999. – № 364. – С. 295-298.
3. *Виноградов А. В., Красильщик И. С., Лычагин В. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва:Наука, 1986.-360С.
4. *Kuzakon V.M., Kuzakon G.A.*, On one method of calculating the differential invariants equations// Proc. International Seminar "Geometry in Odessa- 2005. Differential geometry and its applications", Odessa, 2005.-P.60.
5. *Glushkov A.V., Kuzakon G.A., Svinarenko A.A.*, On estimate of attractor dimension for one class of evolutionary equations// Proc. International Seminar "Geometry in Odessa-2005. Differential geometry and its applications", Odessa, 2005.-P.25.

Диференціальні інваріанти розслоєнь евклідових просторів. **Кузаконь Г.А.**

Запропоновано метод обчислення диференціальних інваріантів розслоєнь $\varphi : R^n \to R$. Виведені безпосередні формули для обчислення диференціальних інваріантів другого порядку.
***Ключові слова**: диференціальні інваріанти розслоєнь, евклідови простори.*

Differential invariants of sublayering the euclide spaces. G.Кuzakon

It is proposed a method of calculating the differential invariants for sublayering $\varphi : R^n \to R$. The direct formula for calculating the differential invariants of second order are derived.
***Keywords:** differential invariants for sublayering.*